

Ein Beitrag zur Theorie
thermischer Konvektion im Erdmantel
mit besonderer Berücksichtigung
der Möglichkeit eines Nachweises
mit Methoden der Seismologie

Helmut Gebrande

1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Ein Beitrag zur Theorie thermischer Konvektion im Erdmantel
mit besonderer Berücksichtigung der Möglichkeit
eines Nachweises mit Methoden der Seismologie

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
des
Fachbereichs Geowissenschaften
der
Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt
von
Helmut Gebrande
Mai 1975



1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Angenheister
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Soffel
- Tag der mündlichen Prüfung: 8. 7. 1975

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Einleitung	1
B. Thermische Konvektion als Antriebsmechanismus geodynamischer Prozesse	9
1. Überblick	9
2. Kurzer Abriß über den Aufbau und die physikalischen Eigenschaften des oberen und mittleren Erdmantels	12
2.1. Geschwindigkeiten der seismischen Wellen und Dichte	12
2.2. Chemische Zusammensetzung und Phasen- zustand	14
2.3. Ausdehnungskoeffizient und spezifische Wärme	17
2.4. Wärmeleitfähigkeit	18
2.5. Radiogene Wärmeproduktion	20
2.6. Rheologie	21
3. Erwartungen an die Theorie	28
4. Die Grundgleichungen thermischer Konvektion	37
4.1. Allgemeine Folgerungen aus den Grund- gleichungen	41
4.2. Vereinfachung der Grundgleichungen	44
4.3. Der Wirkungsgrad thermischer Konvektion	47
5. Konvektion endlicher Amplitude in homogenen Medien	54
6. Zum Problem des Zell-Verhältnisses $n=2D/L$	83
7. Der Einfluß von Phasenumwandlungen auf Kon- vektionsströme im Erdmantel	92
C. Strahlen-seismische Modell-Rechnungen für zwei- dimensional inhomogene Medien mit Anwendung auf die Übergangszone zwischen der Olivin- und der Spinell-Phase im Erdmantel	108
1. Grundprinzipien der Strahlen-Seismik	108

2. Konstruktion zweidimensionaler Modelle des Untergrundes	114
3. Strahlen-geometrische Amplituden	118
4. Über die Möglichkeit eines laufzeit-seismischen Nachweises von Undulationen der Olivin-Spinell-Übergangszone	122
D. Zusammenfassung	132
Literaturverzeichnis	138
Danksagung	152
Lebenslauf	153
Anhang	154

A. Einleitung

Die Fülle an neuen Daten, die in den letzten 15 Jahren insbesondere durch die Seismologie und die marine Geophysik geliefert wurden, hat unter dem Schlagwort "Platten-Tektonik" zu einer Renaissance der durch A. WEGENER bereits 1911/12 formulierten Hypothese der Kontinental-Verschiebung geführt. Das Konzept der Platten-Tektonik ist inzwischen so geläufig, daß wir uns hier als Einleitung mit der Andeutung der wichtigsten Grundzüge begnügen können.

Ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der modernen Vorstellungen war der Nachweis (VINE und MATTHEWS, 1963; VINE, 1966), daß die symmetrischen, streifenförmigen Anomalien des Erdmagnetfeldes, die man über vielen Ozean-Rücken findet, aus der Annahme erklärt werden können, daß in der Scheitelregion der Rücken kontinuierlich basaltisches Magma aus dem oberen Mantel aufdringt, welches bei der Abkühlung eine Magnetisierung in Richtung des jeweiligen erdmagnetischen Feldes erwirbt und als neuer Bestandteil der ozeanischen Lithosphäre nach außen driftet. Diese Idee der kontinuierlichen Neubildung ozeanischer Kruste im Bereich der mittelozeanischen Rücken, für die sich auch bei uns (nach DIETZ, 1961) die Bezeichnung "sea floor spreading" durchgesetzt hat und die von vielen (HALLAM, 1973; MARVIN, 1973; COX, 1973) als Ausgangspunkt einer wissenschaftlichen Revolution gewertet wird, wird im allgemeinen HESS (1962) zugeschrieben.

Ohne das Verdienst von HESS, der eine Vielzahl neuer Argumente beigetragen hat, zu schmälern, muß hier vermerkt werden, daß auch diese Idee bereits von WEGENER (1912) entwickelt wurde. Ausgehend von Überlegungen über die Isostasie und die Niveauunterschiede der ozeanischen Becken schließt er: "Diese (die Niveauunterschiede, Einfügung durch den Autor) scheinen es auch nahezu legen, die mittelatlantische Bodenschwelle als diejenige Zone zu betrachten, in welcher bei der noch immer fortschreitenden Erweiterung des Atlantischen Ozeans der Boden desselben fortwährend aufreißt

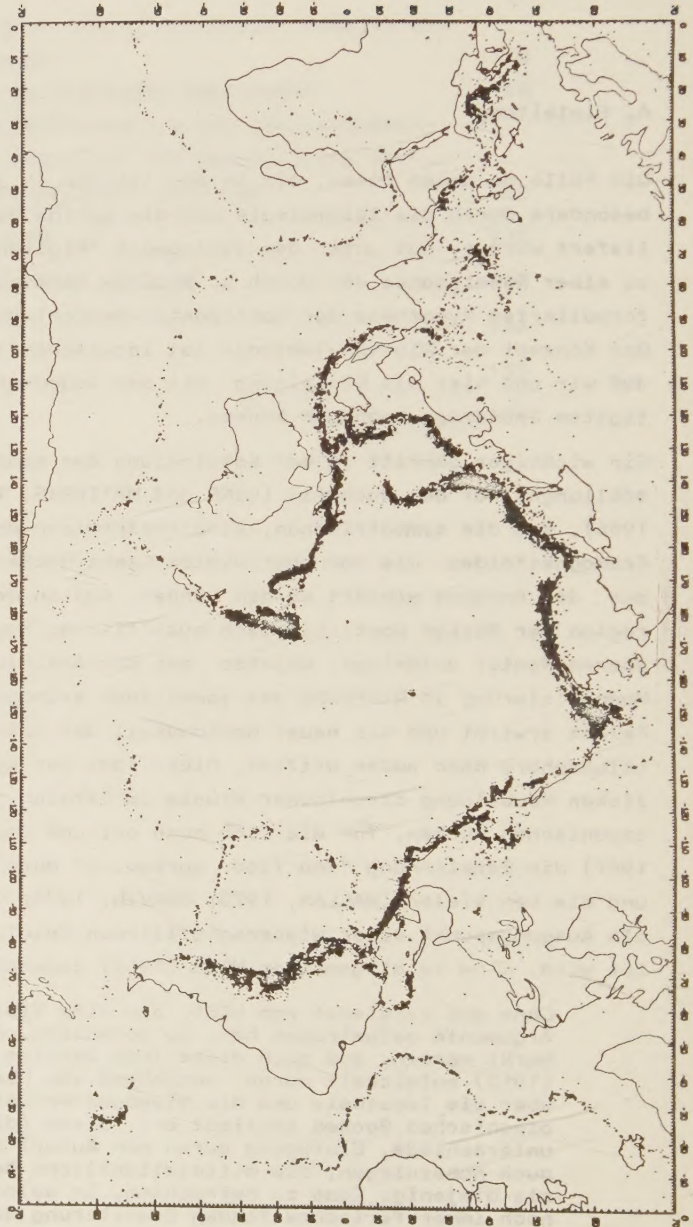


Abb. 1: Weltkarte der Epizentren der Erdbeben, die vom U.S.Coost and Geodetic Survey in den Jahren 1961 bis 1967 bestimmt wurden (nach BARAZANGI und DORMAN, 1969). Die Karte enthält Epizentren von etwa 30 000 Erdbeben unterschiedlicher Herdtiefe. Die seismischen Zonen, die als Grenzen relativ einheitlich bewegter Lithosphären-Platten gedeutet werden, zeichnen sich klar ab.

und frischem, relativ flüssigem und hochtemperiertem Sima aus der Tiefe Platz macht." Klarer kann das Konzept des "sea floor spreading" kaum formuliert werden. Die Diskussion zwischen MEYERHOFF (1968), HESS (1968) und DIETZ (1968), ob die Priorität HESS (1962) oder HOLMES (1931) zukommt, gewinnt vor diesem Hintergrund eine besondere Pointe.

Es ist seit langem bekannt, daß die Seismizität der Erde weitgehend auf einige relativ schmale, aber sehr lange Zonen konzentriert ist. Bereits die Zusammenstellung der Epizentren für einige wenige Jahre läßt diese charakteristische Eigenschaft deutlich hervortreten. Die Abbildung 1 gibt eine Karte wieder, die von BARAZANGI und DORMAN (1969) auf der Grundlage der Epizentrums-Bestimmungen durch den U. S. Coast and Geodetic Survey für die Jahre 1961 bis 1967 erstellt wurde. Die Karte enthält knapp 30000 Epizentren unabhängig von der Herdtiefe.

Es ist auffallend, daß die seismisch aktiven Zonen nicht isoliert sind, sondern ein mehr oder weniger zusammenhängendes Netzwerk bilden. Die Tatsache, daß die dazwischen liegenden Arealen keine oder nur eine vergleichsweise geringe Seismizität aufweisen, hat zu der vereinfachten Modell-Vorstellung der Platten-Tektonik geführt. Hiernach besteht die äußere Schale der Erde aus sechs großen und einigen kleineren, relativ starren Platten, die sich mit Geschwindigkeiten von einigen cm/Jahr relativ zueinander bewegen. Im Grenzbereich benachbarter Platten kommt es, je nach Art ihrer Relativbewegung, zu seismotektonischen Vorgängen unterschiedlichen Typs. Die mittelozeanischen Rücken- und Grabensysteme werden als die Bereiche divergierender Plattenbewegung angesehen, wo mehr oder weniger kontinuierlich Mantelmaterie empordringt und neue ozeanische Kruste bildet. Aus diesen Bereichen sind nur Normal-Beben, d. h. Beben mit Herd-Tiefen kleiner als 70 km bekannt.

Als Pendant zu diesen "konstruktiven" Platten-Grenzen muß es, schon aus Gründen der Massenerhaltung, "destruktive" Platten-grenzen geben, an denen ozeanische Erdkruste wieder in den Erdmantel zurückgeführt (subduziert) wird, bzw. unter ihrem Eigengewicht zurücksinkt. Mit gutem Grund glaubt man diese

Grenzen in den ozeanischen Tiefseegräben gefunden zu haben. Hier gibt es nicht nur Normal-Beben, sondern auch Tiefen-Beben, die sich längs der bekannten BENIOFF-Zonen (BENIOFF, 1954) zum Teil bis in Tiefen von 700 km nachweisen lassen. Durch Untersuchungen der Herdmechanismen oberflächennaher Beben konnte der direkte Nachweis einer Unterschiebung ozeanischer Kruste unter die flankierenden Inselbögen bzw. Kontinentalränder erbracht werden (ISACKS et al., 1968). Die BENIOFF-Zonen zeichnen sich außerdem durch anormal geringe Absorption und vergleichsweise große Geschwindigkeiten der seismischen Wellen aus; durch Subduktion relativ kalter ozeanischer Lithosphäre lassen sich diese Beobachtungen zwanglos erklären (OLIVER et al., 1973).

Als dritten Typ von Plattengrenzen gibt es seismisch aktive Zonen, an denen benachbarte Platten tangential aneinander vorbeigleiten, ohne daß dabei ihre Fläche verändert wird. Es sind spezielle Blattverschiebungen, für die WILSON (1965) die Bezeichnung "transform fault" eingeführt hat und für die bisher kein passender deutscher Begriff vorgeschlagen wurde. Entscheidendes Kennzeichen dieser Störungen ist, daß sie zu beiden Seiten abrupt an konstruktiven oder destruktiven Plattenrändern enden. Der von WILSON (1965) vorhergesagte, normalen Blattverschiebungen entgegengesetzte Bewegungssinn an diesen Störungen konnte durch herdmechanische Untersuchungen eindeutig bestätigt werden (SYKES, 1967).

In Abb. 2 sind die wichtigsten Elemente der Platten-Tektonik, bzw., wie von ISACKS et al. (1968) vorgeschlagen wird, der "Neuen Global-Tektonik" in einer schematischen Darstellung wiedergegeben. Im Gegensatz zur Hypothese der Kontinentalverschiebung von WEGENER bestehen nach den neueren Vorstellungen die driftenden Platten nicht nur aus den Kontinenten, sondern aus größeren Einheiten der Lithosphäre, die in ihrer Mehrheit kontinentale und ozeanische Bereiche umfassen. Der Begriff Lithosphäre wird hier nicht synonym mit Kruste verwendet, sondern um im Gegensatz zur tieferliegenden duktilen

Asthenosphäre das elastische bis spröde Verhalten etwa der obersten 100 km zu charakterisieren.¹⁾

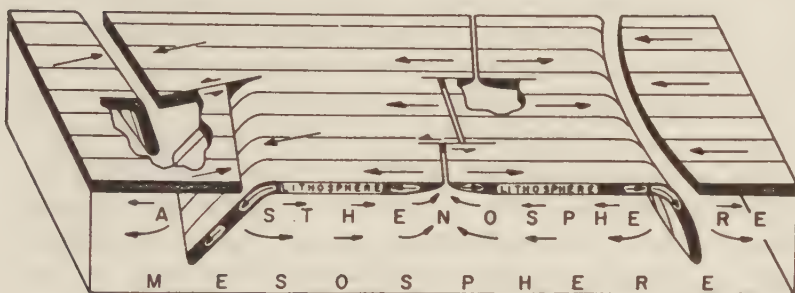


Abb. 2: Schematisches Blockdiagramm zur Illustration des Konzeptes der Neuen Global-Tektonik nach ISACKS, OLIVER und SYKES, 1968. Die Pfeile an der Lithosphäre kennzeichnen die Relativbewegung benachbarter Blöcke. Die Pfeile in der Asthenosphäre deuten eine mögliche Geometrie des Rückstromes von den Subduktionszonen zu den mittelozeanischen Rücken an.

Inzwischen ist die Platten-Tektonik weit über das Stadium einer Arbeitshypothese hinausgewachsen. Eine überzeugende Bestätigung erfuhr sie durch die Ergebnisse der Tiefsee-Bohrungen durch das Forschungsschiff "Glomar Challenger". Durch diese Bohrungen konnte nicht nur qualitativ ein zunehmendes Alter des Meeresbodens mit zunehmendem Abstand von den Scheitelzonen der mittelozeanischen Rücken bestätigt werden, es ergab sich auch quantitativ eine gute Übereinstimmung mit den Altersdatierungen, die mit Hilfe der Zeitskala der Umkehrungen des Erdmagnetfeldes (HEIRTZLER et al., 1968) vorgenommen wurden. Das absolut höchste Alter, das nach mehr als 300 Bohrungen in allen Weltmeeren angetroffen wurde, beträgt 166 Millionen Jahre und bestätigt damit das insge-

¹⁾ In diesem Sinne wurde der Begriff bereits von SUESS (1908), WEGENER (1912) und DALY (1940) verwendet.

samt junge Alter der Ozeanböden (DAVIES und EDGAR, 1974).

Es ist hier nicht der Ort, auf die Vielzahl der Beobachtungen aus allen Bereichen der Geowissenschaften einzugehen, die durch die Neue Global-Tektonik nach einem einheitlichen und einfachen Konzept erklärt werden. Inzwischen liegen eine Reihe von Monographien vor - zum Teil bereits unter wissenschafts-historischen Aspekten verfaßt -, in denen dies ausführlich geschieht (COX, 1973; HALLAM, 1973; MARVIN, 1973; LE PICHON et al., 1973). Bei allen Erfolgen kann aber nicht übersehen werden, daß die Neue Global-Tektonik ihrem Wesen nach eine kinematische Theorie ist. Sie beschreibt die Geometrie und den zeitlichen Ablauf der großräumigen Bewegungsvorgänge in der äußeren Schale der Erde und ermöglicht in dieser Hinsicht auch quantitative Prognosen über unerforschte Gebiete und über die zukünftige Entwicklung, macht aber keine Aussage über die Dynamik, d. h. über die Verknüpfung der Bewegungen mit den Kräften, die sie verursachen. Im Rahmen des internationalen Forschungs-Schwerpunktes Geodynamik wird daher intensiv an dieser weitgehend offenen Frage des Antriebsmechanismus gearbeitet. Auch die vorliegende Arbeit möchte hierzu einen Beitrag liefern.

Geodynamische Theorien können nach dem Energie-Reservoir klassifiziert werden, dem sie die Energie für den Antrieb der geodynamischen Prozesse entnehmen. Es gibt Theorien, die die Energie

1. der Rotations-Energie der Erde bzw. des Systems Erde-Mond

2. der potentiellen Energie der Erde

- oder 3. der thermischen Energie der Erde

entnehmen. Unter 3. wollen wir auch die Kernenergie einbeziehen, soweit sie in der Erde in Form von radiogener Wärme freigesetzt wird. Die JORDAN'sche Expansionstheorie (JORDAN, 1966) läßt sich nicht in dieses Schema einordnen, da sie im Widerspruch zum klassischen Energie-Erhaltungssatz steht. Da sie darüberhinaus immer mehr in Widerspruch mit den Be-

obachtungen gerät (ANGENHEISTER, 1975), brauchen wir uns nicht weiter damit zu befassen.

Zu 1. sind die Theorien zu rechnen, welche Gezeitenkräfte für geodynamische Vorgänge verantwortlich machen. WEGENER (1928) und neuerdings BOSTROM (1971) und MOORE (1973) haben entsprechende Überlegungen angestellt. JEFFREYS (1929) und JORDAN (1974) haben aber gezeigt, daß die Gezeitenkräfte um viele Größenordnungen zu klein sind, um die geforderten Wirkungen hervorzubringen.

Ein Mechanismus, der von der potentiellen Energie zehrt, wäre die gravitative Differentiation des Erdkörpers, insbesondere die Bildung des Erdkerns aus einer zunächst als homogen vorausgesetzten Erde. Entsprechende Untersuchungen von TOZER (1965) haben jedoch ergeben, daß die Kernbildung schon lange in der geologischen Vergangenheit praktisch abgeschlossen war. Ein Antriebsmechanismus durch Differentiationsvorgänge im oberen Mantel scheint wegen der relativ homogenen chemischen Zusammensetzung desselben (BIRCH, 1952 u. 1961) unwahrscheinlich, ist allerdings auch wenig untersucht. Auf jeden Fall wäre gravitative Differentiation zugleich mit einem (erzwungenen) konvektiven Wärmetransport verbunden; von daher gesehen ist es naheliegend, zunächst thermische Konvektion allein zu untersuchen.

Thermische Konvektion, die wir unter 3. einzuordnen hätten, ist wohl derjenige Antriebsmechanismus, der der Mannigfaltigkeit der geotektonischen Vorgänge am ehesten gerecht werden kann. Leider ist es ein sehr komplizierter Mechanismus, der, obwohl intensiv untersucht, bislang nicht einmal in einfachen Medien, geschweige denn im Erdmantel voll verstanden wird. In dieser Situation geht es zunächst darum, ein verbessertes Verständnis für die Physik des Vorgangs zu gewinnen. Hierzu können numerische Modellrechnungen, wie sie neuerdings durch RICHTER (1973), McKENZIE et. al. (1973, 1974), TORRANCE und TURCOTTE (1971) und DE BREMAECKER (1974)

durchgeführt wurden, analytische Lösungen und Modellexperimente beitragen. In Teil B der vorliegenden Arbeit wird versucht, durch eine neue, einfache und teilweise allgemeinere Ableitung der Theorie der Konvektion mit endlicher Amplitude einen Beitrag zu liefern.

Jede fruchtbare Theorie muß soweit entwickelt werden, daß sie an ihren Prognosen getestet werden kann. Die Konvektionstheorie erlaubt in Verbindung mit unseren Kenntnissen über den Aufbau des Erdmantels Prognosen über Strukturen im Erdmantel, die im Prinzip mit den Methoden der Seismologie nachweisbar sein sollten. Es werden hierzu jedoch Auswertungsverfahren benötigt, die auch anwendbar sind, wenn die Geschwindigkeiten der seismischen Wellen nicht nur mit der Tiefe, sondern auch in horizontaler Richtung variieren. In Teil C der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, welches die Berechnung der seismischen Strahlen, der Laufzeitkurven und der strahlengeometrischen Amplituden-Verteilung für entsprechend kompliziert aufgebaute Erdmodelle und beliebige Lage der Hypozentren gestattet. Damit ist die Voraussetzung geschaffen, um in der Zukunft die Prognosen der Konvektionstheorie quantitativ nachprüfen zu können.

B. Thermische Konvektion als Antriebsmechanismus geodynamischer Prozesse

1. Überblick

Daß thermische Konvektion für die Entwicklung des Erdkörpers ein bedeutsamer Prozeß gewesen sein muß, wurde früh erkannt. Bereits HOPKINS (1839) sowie THOMSON und TAIT (1895) diskutierten Konvektion als Mechanismus des Wärmetransportes. FISHER (1881, hier zitiert nach der zweiten Auflage von 1889) stellte - in dem wohl ersten Lehrbuch der Geophysik: "Physics of the Earth's crust" - subkrustale Konvektionsströme ins Zentrum eines weitgespannten geodynamischen Konzepts. Seine Vorstellung, daß Konvektionsströme unter der Mitte der Ozeane aufsteigen und unter den Gebirgen absinken, hat verblüffende Ähnlichkeit mit der Neuen Global-Tektonik. Leider glaubte FISHER aber andererseits an die Persistenz der Ozeane und Kontinente. Auf seine Zeitgenossen scheint FISHER genauso wenig Eindruck gemacht zu haben wie später SCHWINNER (1920) mit seiner sehr gründlich - wenn auch nur qualitativ - ausgearbeiteten Theorie der Konvektionsströme als Ursache von Vulkanismus und Gebirgsbildung.

Ein ausführlicher historischer Überblick über die Konvektionstheorie findet sich bei GEBRANDE (1966). Auf die neueren Entwicklungen werden wir im Rahmen der späteren Ausführungen eingehen.

Man kann zwei Typen von Konvektion unterscheiden: Konvektion infolge horizontaler Temperaturdifferenzen, etwa aufgrund inhomogen verteilter Wärmequellen, und Konvektion infolge instabiler Temperaturschichtung. Da die Konzentration an radioaktiven Elementen in der kontinentalen Kruste wesentlich größer als in der ozeanischen Kruste ist, ist Konvektion infolge horizontaler Temperaturdifferenzen ein durchaus wahrscheinlicher Prozeß. Berechnungen des Temperaturverlaufs un-

ter der Voraussetzung reiner Wärmeleitung führen im oberen Mantel unter Ozeanen zu mehreren 100 °C höheren Temperaturen als unter Kontinenten (CLARK und RINGWOOD, 1964; MacDONALD, 1965). Streng genommen besagt aber dieses Ergebnis vor allem, daß bei der Berechnung der Temperaturen im Erdinnern nicht allein Wärmeleitung, sondern auch konvektiver Wärmetransport berücksichtigt werden muß. PEKERIS (1935) und neuerdings ALLEN et al. (1967) haben gezeigt, daß Konvektion bei horizontalen Temperaturdifferenzen der genannten Größenordnung ein geodynamisch effektiver Mechanismus sein kann. Es ist aber unwahrscheinlich, daß es der für die Platten-Tektonik maßgebliche Mechanismus ist, da es mehrere Platten gibt, die keine kontinentalen Wärmequellen enthalten und die sich doch mit relativ großer Geschwindigkeit gegeneinander bewegen (McKENZIE et al., 1974).

Der entscheidende Antriebsmechanismus wird daher heute meist in instabiler Temperaturschichtung gesehen. Konvektion dieses Typs wird häufig als Rayleigh-Bénard-Konvektion bezeichnet. BENARD (1900 und 1901) hat die ersten systematischen Untersuchungen über die Stabilität von Flüssigkeitsschichten angestellt, die von unten beheizt und oben mit der Luft in Kontakt waren. Beim Überschreiten eines gewissen kritischen Temperaturgradienten beobachtete er das Auftreten von Konvektionsströmen in Form wabenartiger Zellen (Zellular-Konvektion). Die Flüssigkeit stieg in der Mitte der Zellen auf, kühlte sich an der Oberfläche ab und sank an den Seiten der Zellen wieder nach unten. ¹⁾

¹⁾ Wir wissen heute, daß das, was Bénard beobachtet hat, ein anderer Typ von Konvektion war als der, für den heute die Bezeichnung Rayleigh-Bénard-Konvektion verwendet wird. In Bénards Experimenten, die mit etwa nur 1 mm dicken Flüssigkeitsschichten durchgeführt wurden, war die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung von maßgeblichem Einfluß. Dies geht unter anderem aus der von Bénard beobachteten konkaven Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche über dem aufsteigenden Konvektionsstrom hervor. Erst bei dickeren Flüssigkeitsschichten dominieren die Auftriebskräfte; dann ist die Oberfläche über dem aufsteigenden Konvektionsstrom konvex gekrümmt (KAYSER und BERG, 1973). Die theoretischen Untersuchungen von RAYLEIGH (1916) beziehen sich auf den letzteren Fall.

Die theoretische Klärung des Problems, unter welchen Bedingungen Konvektion einsetzt, gelang zuerst RAYLEIGH (1916). Er konnte zeigen, daß Konvektion bei einem gewissen kritischen Wert der dimensionslosen Zahl

$$R = \frac{\alpha \beta g D^4}{\kappa \nu}$$

einsetzt. Diese Zahl wird seither Rayleigh-Zahl genannt. Hier bedeuten α den Ausdehnungskoeffizienten, g die Erdbeschleunigung, D die Dicke der Schicht, κ die Temperaturleitfähigkeit, ν die kinematische Viskosität und β den mittleren Temperaturgradienten. JEFFREYS (1930) hat später gezeigt, daß in kompressiblen Flüssigkeiten anstelle des mittleren Temperaturgradienten der mittlere überadiabatische Temperaturgradient tritt. RAYLEIGH selbst hat die kritische Rayleigh-Zahl für den Fall der unendlich ausgedehnten ebenen Schicht mit scherspannungsfreien Begrenzungen ausgerechnet und den Wert $\pi^4 27/4 = 657,5$ erhalten. JEFFREYS (1926, 1928) hat die Berechnung für eine Reihe weiterer Randbedingungen durchgeführt. Das Stabilitätsproblem für die Vollkugel wurde von JEFFREYS und BLAND (1951), für Kugelschalen von JEFFREYS (1952), CHANDRASEKHAR (1953) und anderen behandelt. CHANDRASEKHAR (1961) hat die Ergebnisse in einer umfangreichen Monographie zusammengefaßt. Die kritischen Rayleigh-Zahlen hängen zwar von der Geometrie der Medien und von der Art der Grenzbedingungen (spannungsfrei oder nicht) ab, sind aber stets von der Größenordnung 10^3 . Durch Rotation wird die kritische Rayleigh-Zahl im allgemeinen vergrößert. Ein merklicher Einfluß ist aber nur vorhanden, wenn die Taylor-Zahl $Ta = (2 \omega D^2 / \nu)$ groß gegen 1 ist (ω ist die Winkelgeschwindigkeit). Für den Erdmantel ist sie von der Größenordnung 10^{-18} bis 10^{-14} und der Einfluß der Erddrehung daher ohne Bedeutung.

Die Leistungsfähigkeit thermischer Konvektion als Antriebsmechanismus geodynamischer Prozesse hängt nicht allein davon ab, ob die Rayleigh-Zahl für den Erdmantel oberhalb der

kritischen liegt oder nicht, sondern vielmehr noch davon, mit welcher Intensität Konvektion bei gegebener Überkritischer Rayleigh-Zahl abläuft. Dieses Problem wird häufig als das nicht-lineare Stabilitätsproblem der Konvektionstheorie bezeichnet, da es nur bei Berücksichtigung nicht-linearer Glieder in den verantwortlichen Differentialgleichungen gelöst werden kann. Für die Bestimmung der kritischen Rayleigh-Zahl - das lineare Stabilitätsproblem - brauchen dagegen nur die linearen Glieder berücksichtigt zu werden, da im Grenzfall gerade beginnender Konvektion die nicht-linearen Glieder vernachlässigt werden dürfen. Durch diese Vernachlässigung nimmt man sich dann aber die Möglichkeit, eine Aussage über die Intensität der Konvektion zu machen, da die Lösung des verbleibenden Systems linearer und homogener Differentialgleichungen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden kann.

Im Abschnitt B 5 werden wir eine Näherungslösung des nicht-linearen Problems behandeln. Da auch hierbei die Rayleigh-Zahl entscheidend eingeht, empfiehlt es sich, zunächst einen kurzen Überblick zu geben, was wir über die in der Rayleigh-Zahl enthaltenen Parameter - und einige mehr, die sich später als wichtig erweisen werden - im Erdmantel wissen. Neben der schon eingangs erwähnten Tatsache, daß Erdbeben nur bis in eine Tiefe von 700 km beobachtet werden, werden wir später noch weitere Argumente dafür kennenlernen, daß Konvektion auf den oberen und mittleren Mantel beschränkt sein dürfte. Wir beschränken uns daher in der folgenden Diskussion auf die oberen 1000 km des Erdmantels.

2. Kurzer Abriß über den Aufbau und die physikalischen Eigenschaften des oberen und mittleren Erdmantels

2.1. Geschwindigkeiten der seismischen Wellen und Dichte.
Die zuverlässigste Information über den physikalischen Zustand im Erdinnern erhält man nach den Methoden der Seismologie.

Durch verfeinerte Beobachtungs- und Auswertungstechniken konnten diese Methoden in den letzten Jahren bedeutsam verbessert werden. Insbesondere über die Geschwindigkeitsverteilung unter Nord-Amerika liegen dank des bei unterirdischen Kernsprengungen gewonnenen Beobachtungsmaterials detaillierte Kenntnisse vor. Die Abbildung 3 zeigt die Geschwindigkeiten der P-Wellen nach JOHNSON (1969, Modell CIT 208). In seinen wesentlichen Zügen ist dieser Geschwindigkeitsverlauf mehrfach bestätigt worden (HALES, 1972; JORDAN und ANDERSON, 1974). Die Geschwindigkeitsverteilung für Transversal-Wellen zeigt, bei entsprechend niedrigeren

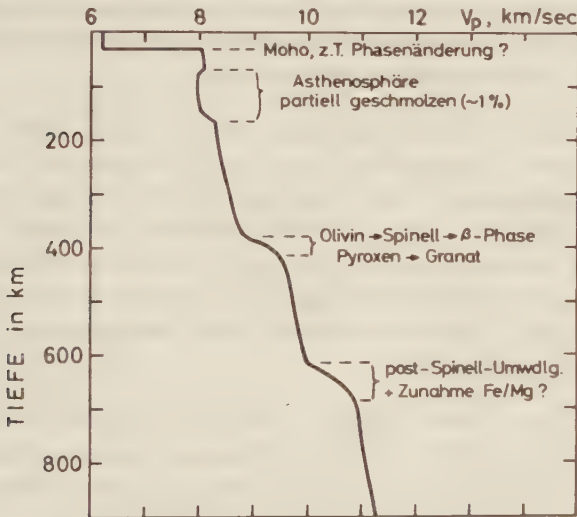


Abb. 3: Geschwindigkeit der Longitudinal-Wellen als Funktion der Tiefe unter dem westlichen Nord-Amerika (nach JOHNSON, 1969). Ergänzend sind die vermutlichen Ursachen einiger Geschwindigkeits-Änderungen eingetragen.

Werten, ein ähnliches Bild (HELMBERGER und ENGEL, 1974; ROBINSON und KOVACH, 1972). Insbesondere wird auch eine starke Zunahme der Geschwindigkeit der S-Wellen bei etwa 400 km und etwa 650 km Tiefe beobachtet. In Verbindung mit bekannten Beziehungen zwischen den seismischen Geschwindigkeiten und der Dichte (BIRCH, 1961; ANDERSON, 1967) folgt ein analoges Verhalten für die Dichte. Mit Hilfe von ANDERSON's seismischer Zustandsgleichung

$$(1) \quad \rho = \bar{A} \bar{M} \phi^n$$

($\phi = V_p^2 - (4/3)V_s^2 = k_s/\rho$ = seismischer Parameter, V_p , V_s = Geschwindigkeiten der Longitudinal- und Transversal-Wellen, k_s = adiabatischer Kompressionsmodul, ρ = Dichte, $\bar{M}$ = mittleres Atomgewicht, A , n = Konstanten) können die Geschwindigkeiten besonders einfach in Dichte-Werte transformiert werden. Die Nebenbedingungen für die Masse und das Trägheitsmoment der Erde können dabei erfüllt werden, ohne daß eine Variation des mittleren Atomgewichts im oberen oder mittleren Mantel erforderlich wäre. Zur selben Schlußfolgerung führen Dichte-Modelle, die aufgrund des Spektrums der Eigenschwingungen der Erde und der Geschwindigkeiten seismischer Wellen abgeleitet wurden (WANG, 1972; JORDAN und ANDERSON, 1974).

Die Grenze zwischen den rheologisch verschiedenen Zonen der Lithosphäre und Asthenosphäre glaubt man aufgrund der Ergebnisse der Seismologie in dem Tiefenbereich im oberen Mantel annehmen zu dürfen, wo die Geschwindigkeiten abnehmen, d. h. unter dem westlichen Nord-Amerika in 70 bis 80 km Tiefe. Die Zone erniedrigter Geschwindigkeit kann vermutlich nur durch die Annahme partiell geschmolzenen Materials interpretiert werden (ANDERSON und SAMMIS, 1970).

Die Bereiche der großen Geschwindigkeitsgradienten bei 400 km und 650 km Tiefe werden in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Hochdruck-Petrologie als Phasenumwandlungen der Mantel-Materie interpretiert (BIRCH, 1952; RINGWOOD, 1970).

2.2. Chemische Zusammensetzung und Phasenzustand.

Aufgrund petrographischer Gesichtspunkte hat RINGWOOD (1962 a, b) ein Modell über die chemische Zusammensetzung des oberen Erdmantels entwickelt, das heute weitgehend anerkannt wird. Hiernach entspricht die chemische Zusammensetzung einem Gemisch von drei Teilen Dunit und einem Teil Basalt (zunächst waren es vier Teile Dunit). Für dieses Gemisch hat RINGWOOD die Bezeichnung Pyrolit eingeführt. Wichtigste mineralogische

Komponente dieses hypothetischen Gesteins ist Olivin mit einem Fe:Mg-Verhältnis von 1:9. Die Olivine bilden bekanntlich eine kontinuierliche Mischungsreihe zwischen den Endgliedern Forsterit Mg_2SiO_4 und Fayalit Fe_2SiO_4 . Daneben ist im oberen Mantel vor allem Pyroxen und Granat zu erwarten. Die physikalischen Eigenschaften werden vor allem durch das Verhalten von Olivin bestimmt.

Bereits 1936 hatte BERNAL aufgrund der Ergebnisse von BULLEN (1936), die Anzeichen für eine Inhomogenität des mittleren Mantels ergeben hatten, vermutet, die Olivine könnten in einer Tiefe um 400 km in eine Spinell-Phase übergehen. Der direkte experimentelle Nachweis dieser Phasenumwandlung gehört zu den herausragenden Erfolgen geowissenschaftlicher Forschung in den letzten zehn Jahren. Nachdem

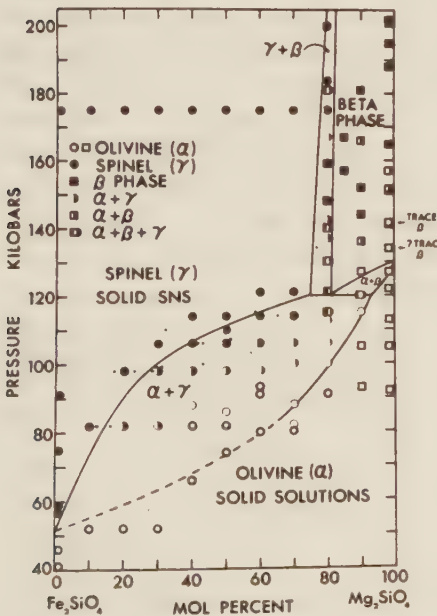


Abb. 4: Phasendiagramm des Systems Fe_2SiO_4 - Mg_2SiO_4 bei 1000 °C nach RINGWOOD (1972). Nach dem Pyrolit-Modell sind im Erdmantel Olivine der Zusammensetzung $(\text{Mg}_{0,89}\text{Fe}_{0,11})_2\text{SiO}_4$ zu erwarten. Diese gehen bei steigendem Druck im Gegensatz zu den Olivinen mit einem Fe-Gehalt größer als 20 Mol-Prozent zunächst nicht in kubische Spinelle, sondern in eine rhombische β-Phase über; sie ist 8 % dichter als Olivin. Die echte Spinell-Phase von Mg_2SiO_4 wurde bei 250 kb synthetisiert (ITO et al., 1974).

die Spinell-Phase von Fe_2SiO_4 schon zuvor nachgewiesen worden war, gelang 1966 die Synthese des Mg_2SiO_4 -Spinells fast gleichzeitig RINGWOOD und MAJOR (1966) sowie AKIMOTO und IDA (1966). Die Abbildung 4 zeigt das Phasendiagramm des Systems Fe_2SiO_4 - Mg_2SiO_4 nach RINGWOOD (1972) bei 1000 °C. Genau genommen gehen die natürlichen Olivine, die meist Mg-Gehalte über 80 Mol-Prozent haben, zunächst nicht in eine echte Spinell-Phase, sondern in eine sogenannte β -Phase geringerer Symmetrie über (MOORE und SMITH, 1970). Für die geophysikalische Anwendung ist der Unterschied nicht bedeutend, da die β -Phase mit 8 % fast die gleiche Dichtezunahme wie die echte Spinell(γ)-Phase (10 %) aufweist. Die echte Spinell-Phase von Mg_2SiO_4 wurde kürzlich von ITO et al. (1974) bei etwa 250 kb und 1000 °C synthetisiert.

Für die spätere Anwendung ist neben der Dichtezunahme vor allem die Steigung der Phasengrenze im p-T-Diagramm wichtig. Wegen der Ungenauigkeit der Druck-Eichung ist diese nur ungenau bekannt. RINGWOOD (1972) befürwortet einen Wert von 30 bar/°C, AKIMOTO und FUJISAWA (1968) erhielten durch Extrapolation für Mg_2SiO_4 62 bar/°C und ITO et al. (1971) haben durch direkte experimentelle Beobachtung an natürlichem Olivin eine Steigung von 54 bar/°C. Die letzten beiden Werte sind in befriedigender Übereinstimmung mit einem Wert von 61 bar/°C, den GEBRANDE (1966, 1967) aufgrund theoretischer Überlegungen unter Verwendung seismischer Daten abgeleitet hat.

Der Umwandlungsdruck für die Olivin-Spinell-Umwandlung stimmt bei plausiblen Annahmen über die Temperatur im Erdmantel recht gut mit dem Druck in etwa 400 km Tiefe überein. Es wird daher nicht mehr daran gezweifelt, daß der anormale Anstieg der seismischen Geschwindigkeiten in etwa 400 km Tiefe auf die Olivin-Spinell-Umwandlung zurückzuführen ist. Möglicherweise ist auch noch eine Phasenumwandlung von Pyroxen in Granat (RINGWOOD, 1970), mit der etwa bei den gleichen p-T-Bedingungen gerechnet wird, überlagert. Umgekehrt kann das Phasendiagramm für Olivin

in Verbindung mit den seismischen Daten zur Bestimmung der Temperatur in 400 km Tiefe verwendet werden. Mit den Daten von ITO et al. (1971) und der Geschwindigkeitsverteilung von JOHNSON (1969) erhält man in 380 km Tiefe, wo die Phasenübergangszone zu beginnen scheint, eine Temperatur von rund 1400°C (vgl. Abb. 16). Infolge der Ungenauigkeit der Druckeichung und des begrenzten Auflösungsvermögens der seismischen Verfahren dürfte mit einem Fehler von $\pm 100^{\circ}\text{C}$ zu rechnen sein. FUJISAWA (1968) gibt bei einer ähnlichen Abschätzung aufgrund älterer Daten eine Fehlergrenze von etwa $\pm 200^{\circ}\text{C}$ an.

Es ist naheliegend für die Geschwindigkeitszunahme in 650 bis 700 km nach einer ähnlichen Interpretation zu suchen. BIRCH (1952) hat gezeigt, daß der Verlauf der seismischen Geschwindigkeiten unterhalb 1000 km Tiefe am ehesten verstanden werden kann, wenn angenommen wird, daß die Materie hier in Oxyd-Strukturen in dichtester Kugelpackung vorliegt. Eine Reihe anderer Alternativen hat RINGWOOD (1970, 1972) aufgezeigt. Die neuesten experimentellen Untersuchungen bei höchsten Drucken scheinen jedoch die Hypothese von BIRCH (1952) zu bestätigen und legen es nahe, die Geschwindigkeitszunahme bei 650 km auf die Disproportionierung der Silikate in Oxyde zurückzuführen (KUMAZAWA et al., 1974; MING und BASSET, 1975). Unter geodynamischen Aspekten ist besonders interessant, daß die Disproportionierung endotherm und daher auch mit negativer Steigung im p-T-Diagramm abläuft. Für die Disproportionierung von Fe_2SiO_4 geben BASSET und MING (1972) aufgrund thermodynamischer Berechnungen eine Steigung von $-22 \text{ bar}/^{\circ}\text{C}$ an. Die negative Steigung beruht darauf, daß bei der Disproportionierung die Entropie-Änderung nicht allein durch die Volumen-Änderung, sondern mehr noch durch die Mischungsentropie bestimmt wird.

2.3. Ausdehnungskoeffizient und spezifische Wärme.

Das Verhältnis von Ausdehnungskoeffizient zu spezifischer Wärme bei konstantem Druck α/c_p kann näherungsweise über die DEBYE-GRÜNEISEN-Theorie (vgl. BIRCH, 1952) aus den seis-

mischen Daten bestimmt werden. Da überall im Erdmantel die Temperatur weit über der DEBYE'schen charakteristischen Temperatur liegt, darf zugleich die spezifische Wärme c_v bei konstantem Volumen als konstant angenommen werden. Wegen $c_p = c_v (1 + \gamma \alpha T)$ (T = absolute Temperatur, γ = Grüneisen-Parameter) unterscheiden sich die beiden spezifischen Wärmen nur um wenige Prozent. Mit hinreichender Genauigkeit kann daher auch c_p als konstant angesehen werden. Die Abbildung 5 zeigt den Verlauf von α und α/c_p nach BIRCH (1952) aus GRIGGS (1972). Der Ausdehnungskoeffizient ist für die Konvektion ein sehr wichtiger Parameter, da er die Größe der Auftriebskräfte bestimmt. Im allgemeinen wird in der Konvektions-Theorie mit einem konstanten Wert $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ gerechnet.

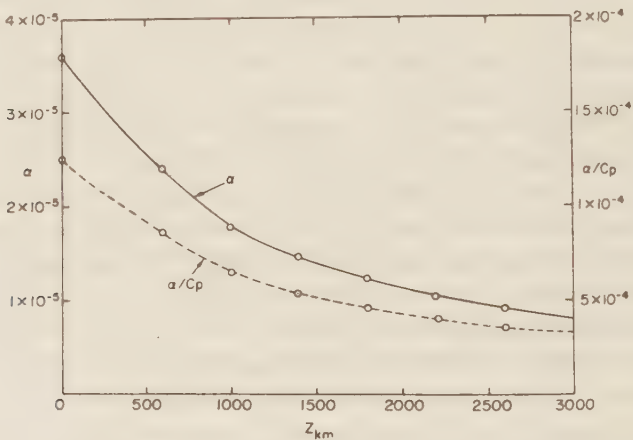


Abb. 5: Thermischer Ausdehnungskoeffizient α und Verhältnis α/c_p nach BIRCH (1952) und GRIGGS (1972) aufgrund der Debye-Grüneisen-Theorie und seismischer Daten.

2.4. Wärmeleitfähigkeit.

Die Wärmeleitfähigkeit λ im Erdmantel ist nur unzureichend bekannt. Extrapolationen von Messungen bei Normal-Bedingungen sind problematisch, da verschiedene Leitfähigkeitsmechanismen im Spiel sind, die erst bei hohen Temperaturen wirksam werden. Experimentell wird häufig nicht die Wärmeleitfähigkeit, sondern direkt die

Temperaturleitfähigkeit $\kappa = \lambda / \rho c_p$ bestimmt, die in der Rayleigh-Zahl erscheint.

Im oberen und mittleren Mantel dürften nach CLARK (1969) vor allem die normale Phononen-Leitung und Wärmetransport durch Strahlung wichtig sein. Die Phononen-Leitung nimmt mit steigender Temperatur proportional zu $1/T$ ab, der Strahlungs-Anteil dagegen nimmt wie T^3/ϵ zu; ϵ ist ein Extinktionskoeffizient, der die Wirkung von Absorption und Streuung beschreibt. Dieser Extinktionskoeffizient hängt in komplizierter Weise von Druck, Temperatur, Korngröße und Chemismus ab und ist daher für den Erdmantel nur unzureichend bekannt.

Experimentelle Untersuchungen an Olivinen sind von FUJISAWA et al. (1968) bis zu Drucken von 50 kbar und Temperaturen von 1400 °K und von STAUDACHER (1971) bis 24 kbar und 1000 °K durchgeführt worden. Die Meßergebnisse lassen sich bis zu Temperaturen von 1200 °K durch ein $1/T$ -Gesetz beschreiben. Die Druckabhängigkeit der Temperatur-Leitfähigkeit scheint daneben weniger bedeutsam. Die Untersuchungen von FUJISAWA et al. und STAUDACHER wurden an feinkörnigen polykristallinen Proben durchgeführt. Untersuchungen an Einkristallen bei Normal-Druck von KANAMORI et al. (1968) lassen bereits bei 800 °K Abweichungen vom $1/T$ -Gesetz erkennen, die auf Wärme-Strahlung zurückgeführt werden. Da im Erdmantel mit relativ großen Kristalliten zu rechnen ist, könnte auch hier die Strahlung bei relativ geringen Temperaturen bedeutsam werden.

Generell ist zu erwarten, daß die Leitfähigkeit zunächst mit der Tiefe abnimmt, ein Minimum zwischen 500 und 1500 °C erreicht und bei höheren Temperaturen vermutlich mit T^3 ansteigt. Nach LUBIMOVA (1967) dominiert bereits ab etwa 100 km Tiefe ein Leitungs-Mechanismus durch Exzitonen-Diffusion, der ein exponentielles Ansteigen der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur bewirkt. CLARK (1969) will diesem Mechanismus aber allenfalls im unteren Mantel Bedeutung beimessen.

In Zusammenhang mit dem Phasen-Zustand des Mantelmaterials ist die Beobachtung von FUJISAWA et al. bemerkenswert, daß bei der Olivin-Spinell-Umwandlung von Fe_2SiO_4 die Leitfähigkeit etwa um den Faktor 1,5 zunimmt. Die Leitfähigkeit von Periklas (MgO) ist nach KANAMORI et al. (1968) bei höheren Temperaturen sogar drei bis fünf mal so groß wie die von Olivin. Vermutlich kann daher die Wärme, die im oberen und mittleren Mantel konvektiv transportiert wird, im unteren Mantel allein durch Wärmeleitung transportiert werden.

Trotz der gewiß vorhandenen starken Variation der Wärmeleitfähigkeit wurde in der Konvektions-Theorie bislang immer mit konstanter Leitfähigkeit gerechnet. Häufig wird für die Temperaturleitfähigkeit der Wert $\chi = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$ verwendet, der durch die experimentellen Ergebnisse als Mittelwert einigermaßen zu rechtfertigen ist.

2.5. Radiogene Wärmeproduktion.

Die radioaktiven Elemente sind in den verschiedenen Gesteinen sehr unterschiedlich konzentriert. In den sauren Gesteinen sind sie besonders angereichert. Nach Angaben von WEDEPOHL (1969) errechnet man, daß zur Deckung des Wärmeflusses an der Erdoberfläche, der bekanntlich im Mittel in Kontinenten und Ozeanen etwa gleich groß - und zwar gleich $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$ - ist (LEE, 1970), folgende Mächtigkeiten der jeweiligen Gesteine benötigt würden:

Granite	20 km
Granodiorite	42 km
tholeiitische kontinentale Basalte	150 km
tholeiitische ozeanische Basalte	650 km
Peridotite (Basalteinschlüsse)	2800 km
Chondrite	3500 km

Man erkennt daran, daß der Wärmefluß im kontinentalen Bereich leicht aus den Kontinenten selbst gedeckt werden kann; möglicherweise ist sogar ein Überschuß vorhanden, der durch Konvektion unter die Ozeane geschafft werden muß. Berechnet man hieraus die Wärmeproduktion h für den hypothetischen Pyrolit

entsprechend dem Verhältnis von 3 Teilen Peridotit und 1 Teil Basalt - und hier ist es konsequent von ozeanischem Tholeiit auszugehen, da dieser als unmittelbares Derivat aus dem Mantel angesehen werden kann - so erhält man $h \approx 10^{-14} \text{ cal/cm}^3 \text{ sec}$, bzw. zur Deckung des gesamten Wärmeflusses eine Mächtigkeit von etwa 1500 km. CLARK und RINGWOOD (1964) haben für den oberen Mantel eine inhomogene, unter Kontinenten und Ozeanen unterschiedliche Verteilung der Wärmequellen angenommen (- wohl hauptsächlich um plausible Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu erzwingen). Im Lichte von Kontinentaldrift und "sea floor spreading" ist ein einfacheres Modell mit homogen verteilten Wärmequellen vorzuziehen.

2.6. Rheologie.

Die Natur bietet uns eine Vielzahl von Beweisen, daß Gesteine duktil, d.h. irreversibel und bruchlos, verformt werden können: Falten jeder Größenordnung, Fließ-Gefüge, länglich deformierte Gerölle und Fossilien und vieles andere (s. z.B. SCHMIDT-THOME, 1972). Solche Verformungen sind offensichtlich selbst unter den gemäßigten Druck- und Temperaturbedingungen der oberen und mittleren Erdkruste möglich. Eine materialbedingte obere Grenze für die Verformung scheint es nicht zu geben.

Umsomehr darf man die Möglichkeit von Fließvorgängen unter den erhöhten Drucken und Temperaturen im Erdmantel für wahrscheinlich halten. Bereits AMPFERER (1906) hat überzeugend dargelegt, daß ohne Strömungsvorgänge im oberen Mantel die großtektonischen Gegebenheiten nicht zu erklären sind. Dennoch ist die Rheologie des Erdmantels eines der am meisten umstrittenen Probleme in der Geophysik.

Aus isostatischen Hebungsvorgängen, deren räumlicher und zeitlicher Ablauf an der Erdoberfläche bekannt ist, kann man die Viskosität im Erdmantel quantitativ berechnen. Allerdings benötigt man hierfür die Voraussetzung, daß viskoses Verhalten die Rheologie des Erdmantels überhaupt richtig beschreibt.

Das bekannteste Beispiel ist die nach-eiszeitliche Hebung Skandinaviens, die als Reaktion auf das Abtauen der Eisbedeckung verstanden wird. Seit der ersten Abschätzung durch VAN BEMMELEN und BERLAGE (1935) ist dieser Vorgang mehrfach - unter unterschiedlichen Modell-Annahmen und mit unterschiedlichem mathematischen Aufwand - zu Berechnungen der Viskosität im Erdinnern herangezogen worden. McCONNELL (1968) ist es gelungen, durch ein Modell mit Schichten unterschiedlicher Viskosität den räumlichen und zeitlichen Verlauf der Aufwölbung nahezu perfekt zu beschreiben. Die Geschichte der Aufwölbung kann durch die Kartierung gehobener Strandlinien bekannten Alters (Datierung durch Pollenanalyse oder radiometrisch) rekonstruiert werden. Die Stufenfunktion in Abbildung 6 gibt McCONNELL's erfolgreichstes Modell wieder. Es besteht aus einer obersten, 120 km dicken elastischen Schicht und einer Folge viskoser Schichten mit einem Minimum der Viskosität von

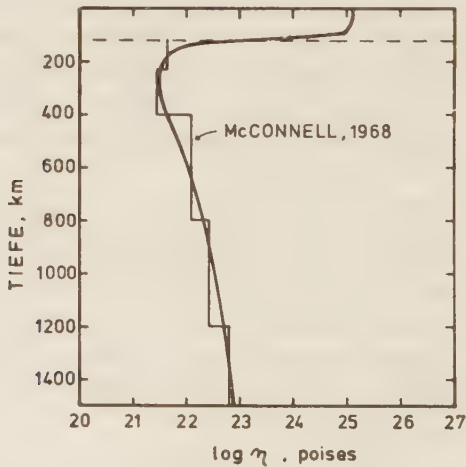


Abb. 6: Viskosität im Erdmantel als Funktion der Tiefe. Die Treppenfunktion gibt McCONNELL's (1968) bevorzugtes Modell zur Erklärung der Hebung Skandinaviens wieder. Eine glattere Funktion, ähnlich der eingetragenen fetten Linie, ist wahrscheinlicher. Die große Viskosität in den oberen 100 km beruht auf Untersuchungen von WALCOTT (1973) und LLIBOUTRY (1974).

$2,7 \cdot 10^{21}$ poises zwischen 220 und 400 km Tiefe und einer schnellen Zunahme der Viskosität mit größer werdender Tiefe. Für den oberen und mittleren Mantel ist McCONNELL's Modell mehrfach bestätigt worden (O'CONNELL, 1971; WALCOTT, 1973); über die Viskosität des unteren Mantels gehen die Meinungen dagegen weit auseinander. Hierfür werden Werte zwischen etwa 10^{22} (O'CONNELL, 1971) und 10^{26} poises (MacDONALD, 1963; McKENZIE, 1967) angegeben. Die hohen Werte beruhen allerdings auf einer Interpretation der zu großen Abplattung der Erde, die nicht mehr allgemein akzeptiert wird (GOLDREICH und TOOMRE, 1969). Eine Zunahme der Viskosität zwischen 400 und 1000 km Tiefe um mindestens eine Größenordnung scheint jedoch gesichert.

Andererseits kann man versuchen, durch experimentelle Verformung von Gesteinen und Mineralien sowie durch die Anwendung von Erkenntnissen der theoretischen Festkörper-Physik Aussagen über Rheologie des Erdinneren zu erhalten.

Für geodynamische Vorgänge ist vor allem das rheologische Verhalten der Gesteine bei relativ kleinen Spannungen von einigen bar bis einigen 100 bar interessant. Da aber bei so kleinen Spannungen in Gesteinen innerhalb akzeptabler Zeiten keine hinreichend genau meßbaren Verformungen erzeugt werden können, werden Verformungsexperimente im allgemeinen bei wesentlich größeren Spannungen durchgeführt. Die Extrapolation auf kleinere Spannungen bleibt dann aber problematisch, da nicht gewährleistet ist, daß hier noch derselbe Verformungs-Mechanismus wirksam ist.

Bei gemäßigten Temperaturen und Spannungen, die weit genug unterhalb der Bruchfestigkeit liegen, können Gesteine experimentell im allgemeinen nur in geringem Maße irreversibel verformt werden: unter konstanter Belastung nimmt die Verformungs-Geschwindigkeit im Laufe der Zeit mehr und mehr ab und wird schließlich Null, bzw. unmeßbar klein. Dieses Verhalten erklärt einige Eigenschaften der oberen Erdkruste, z. B. die

Tatsache, daß die Gebirge nicht zerfließen, kann aber nicht der maßgebliche Prozeß im tieferen Erdinnern sein. Hierfür müssen wir ein stationäres Fließverhalten postulieren, d.h. eine konstante Verformungs-Geschwindigkeit bei konstanter Spannung.

Theoretische Untersuchungen über stationäres Fließen (Kriechen) polykristalliner Festkörper (WEERTMANN, 1970) führen auf Zusammenhänge zwischen der Verformungs-Geschwindigkeit $\dot{\epsilon}$, der Spannung σ und der absoluten Temperatur T von der Form

$$(2) \quad \dot{\epsilon} = A \cdot f(\sigma) \cdot \exp(-bT_m/T).$$

T_m ist hier die Schmelztemperatur, A eine Konstante, die noch vom Material, der Temperatur, dem Verformungsmechanismus und geringfügig vom Druck abhängen kann, und b eine Konstante, die nur vom Material abhängen soll. Die Funktion $f(\sigma)$ hängt nur vom Verformungs-Mechanismus ab. Wegen der exponentiellen Abhängigkeit vom Verhältnis T_m/T wird stationäres Fließen in der Regel nur bei Temperaturen nicht zu weit unterhalb der Schmelztemperatur erwartet werden können. Hohe Temperatur allein ist andererseits keine hinreichende Bedingung für stationäres Kriechen. Bei Verformungs-Experimenten von MURRELL und CHAKRAVARTY (1973) an Dolerit und Granodiorit unter ein-axialem Druck wurde auch bei Temperaturen über 1000 °C, ja sogar noch oberhalb der Solidus-Temperatur, d.h. bei Anwesenheit eines intergranularen Schmelzfilmes, nur instationäres, nach einiger Zeit (Stunden) abklingendes Kriechen beobachtet. Bei Erhöhung des Drucks trat selbst unter diesen Bedingungen der Bruch als Spröd-Bruch ein. GOETZE (1971) hat Kriechversuche an Granit unter einem zusätzlichen hydrostatischen Druck von 4 bis 5 kbar durchgeführt, konnte aber bis zur Solidus-Temperatur ebenfalls nur instationäres Kriechen beobachten. Erst in jüngster Zeit scheint KIRBY und RALEIGH (1973) bei 1100 °C und 15 kbar und KOHLSTEDT und GOETZE (1974) zwischen 1400 und 1700 °C und Normaldruck der Nachweis von stationärem Kriechen an Olivin gelungen zu sein.

Von einer Viskosität im Newton'schen Sinne kann nur gesprochen werden, wenn die Verformungs-Geschwindigkeit proportional zur Spannung ist, d.h. wenn in Gleichung 2 die Funktion $f(\sigma) = \sigma$ ist; es gilt dann $\eta = \sigma/\dot{\epsilon}$. An Metallen wird bei hohen Temperaturen und kleinen Spannungen dieser Zusammenhang beobachtet; bei größeren Spannungen dagegen findet man eine mehr als lineare Zunahme der Verformungs-Geschwindigkeit mit der Spannung, was häufig durch Potenz-Gesetze der Form $f(\sigma) = \sigma^n$ mit $n > 1$ beschrieben wird. Bei Gesteinen ist bisher immer nur dieser nicht-lineare Zusammenhang beobachtet worden. Es wird daher häufig der Begriff der effektiven Viskosität verwendet, die in Analogie zur Newton'schen Viskosität durch $\eta_{\text{eff}} = \sigma/\dot{\epsilon}$ definiert wird. Wenn die Spannungs-Abhängigkeit durch ein Potenz-Gesetz beschrieben wird, wird die effektive Viskosität für kleine Spannungen beliebig groß, was für die mathematische Beschreibung von Strömungen im Erdmantel schwerwiegende Folgen hätte.

Theoretisch kann gezeigt werden (WEERTMANN, 1970), daß Potenz-Gesetze mit $n=3$ zu erwarten sind, wenn die Diffusion von Versetzungs-Linien den Verformungs-Mechanismus bestimmt. Daneben gibt es die Verformung durch Diffusion von Fehlstellen. Dieser Mechanismus (Nabarro-Herring-Kriechen) führt auf einen linearen Zusammenhang, d.h. eine echte Viskosität, und wird als maßgeblich für das entsprechende Verhalten von Metallen bei hohen Temperaturen und kleinen Spannungen angesehen. Im Prinzip wird dieses Verhalten auch für Gesteine erwartet, doch wird heute meist die Auffassung vertreten, daß es erst unterhalb von Spannungen der Größenordnung 10^{-2} bar bzw. unterhalb von Verformungs-Geschwindigkeiten der Größenordnung $10^{-16} \text{ sec}^{-1}$ dominant wird (WEERTMANN, 1970; KIRBY und RALEIGH, 1973). Folglich wäre auch für langfristige geodynamische Vorgänge nicht mit einer normalen Viskosität, sondern mit einer spannungsabhängigen effektiven Viskosität zu rechnen. Als weiteres Argument hierfür werden die Ergebnisse elektronen-

mikroskopischer Untersuchungen an Olivinen und Pyroxenen aus Basalt-Einschlüssen, die als Mantelmaterial angesehen werden, angeführt: aus Geometrie und Dichte der Versetzungslinien wird im Vergleich mit experimentell verformten Proben geschlossen, daß auch im oberen Mantel der nicht-lineare Verformungs-Mechanismus durch Wandern von Versetzungslinien vorherrscht (GREEN und RADCLIFFE, 1972; KIRBY und RALEIGH, 1973).

Bei kritischer Durchsicht der Literatur kommt man allerdings nicht zur Überzeugung, daß diese Schlußfolgerung zwingend ist. Gerade die neuesten Untersuchungen von KOHLSTEDT und GOETZE (1974), die bei den bisher kleinsten einaxialen Spannungen (50 bis 1500 bar) durchgeführt wurden, können unterhalb 500 bar ohne weiteres durch ein lineares Gesetz interpretiert werden.

Insgesamt kann festgehalten werden, daß die Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Rheologie im Prinzip einen ähnlichen Verlauf der Viskosität, bzw. einer spannungsabhängigen effektiven Viskosität, erwarten lassen, wie er von McCONNELL (1968) aus der Hebung Skandinaviens abgeleitet wurde (WEERTMANN, 1970; GORDON, 1971). Die kontinuierliche Kurve in Abb. 6 ist aus physikalischen Gründen wahrscheinlicher als McCONNELL's Modell mit Schichten konstanter Viskosität. Die Viskosität von etwa 10^{25} poises für die Lithosphäre, die McCONNELL als nur elastisch behandelt hatte, beruht auf Ergebnissen von WALCOTT (1973) und LLIBOUTRY (1974).

Wir können diesen Abschnitt nicht abschließen ohne auf zwei Besonderheiten der Rheologie hinzuweisen, die ihre Ursachen in Phasenumwandlungen haben.

Die seismisch nachgewiesene Zone erniedrigter Geschwindigkeiten im oberen Mantel (s. Abschnitt B 2.1.) kann vermutlich nur durch die Annahme partiell geschmolzenen Materials gedeutet werden. Über die Rheologie partieller Schmelzen ist bisher nur wenig bekannt. Es ist aber ohne weiteres einleuchtend, daß die Viskosität durch das Auftreten der flüssigen Phase stark herab-

gesetzt wird, auch wenn diese nur einen prozentual kleinen Anteil einnimmt. STOCKER und ASHBY (1973) haben eine Theorie entwickelt, die dieses Verhalten vorhersagt. Die Theorie scheint aber bislang experimentell nicht bestätigt worden zu sein. Das negative Ergebnis der Versuche von MURELL und CHAKRAVARTY (1972), die auch bei partiellem Schmelzen nur instationäres, vorübergehendes Kriechen ergeben hatten, kann wohl nicht als Gegenbeweis angesehen werden, da diese Versuche nicht unter allseitigem Druck durchgeführt wurden.

Im Hinblick auf die Phasenumwandlungs-Zonen bei 400 km und 650 km Tiefe könnte ein Effekt Bedeutung gewinnen, der unter der Bezeichnung Superplastizität aus der Metallurgie bekannt ist und teilweise technisch bei der Metallverformung ausgenutzt wird. Er besteht darin, daß einige Materialien unter den p-T-Bedingungen, unter denen sie Phasenumwandlungen eingehen, plastisch besonders leicht verformt werden können. Der Effekt der Superplastizität kann sowohl bei Hochdruck- wie auch bei Hochtemperatur-Umwandlungen auftreten, wie GORDON (1971) an RbJ bzw. SAMMIS und DEIN (1974) an CsCl nachgewiesen haben. Obwohl noch keine quantitativen Untersuchungen an Silikaten vorliegen, kann vermutet werden, daß tektonische Bewegungen während der Metamorphose durch Superplastizität erleichtert werden. Die Phasenübergangs-Zonen im Erdmantel könnten zugleich Zonen sein, in denen unter relativ geringen Spannungen große Gradienten der Strömungs-Geschwindigkeiten möglich sind.

Die Variation der Viskosität mit der Tiefe und die eventuelle Abhängigkeit der effektiven Viskosität von der wirksamen Scherspannung sind Effekte, die in einer voll befriedigenden Theorie der Konvektion im Erdmantel sicher berücksichtigt werden müssen. Bislang gibt es nur Versuche in dieser Richtung (TURCOTTE und OXBURGH, 1969; SCHUBERT und TURCOTTE, 1972; OROWAN, 1965). Die mathematische Beschreibung der Konvektion wird hierdurch so kompliziert, daß nur noch nume-

rische Verfahren Aussicht auf Erfolg versprechen. TORRANCE und TURCOTTE (1971) haben bisher die einzigen numerischen Modellrechnungen unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität durchgeführt. Das Verhältnis von horizontalem zu vertikalem Durchmesser der Konvektionszellen wurde allerdings bei ihren Berechnungen von vornherein gleich $\sqrt{2}$ gesetzt, also fest vorgegeben, sodaß die vermutlich wichtigste Wirkung variabler Viskosität, nämlich die Verschiebung dieses Verhältnisses in Richtung größerer horizontaler Ausdehnung (vgl. Abschnitt B 6), nicht beobachtet werden konnte. Alle anderen Autoren haben bisher mit konstanter Viskosität gerechnet und auch in der vorliegenden Untersuchung müssen wir uns weitgehend mit dieser vereinfachenden Annahme begnügen.

3. Erwartungen an die Theorie

Wir haben oben gesehen, daß einige der wichtigsten Parameter, die in der Rayleigh-Zahl enthalten sind, im Erdmantel nicht konstant sind, sondern zum Teil sogar um mehrere Größenordnungen variieren. Wir können daher das Rayleigh'sche Stabilitäts-Kriterium, welches die Konstanz aller Parameter in der Rayleigh-Zahl voraussetzt, streng genommen nicht anwenden. Wir dürfen aber hoffen, daß doch etwas Vernünftiges dabei herauskommt, wenn wir "Mittelwerte" der jeweiligen Parameter einsetzen.

Der einzige unproblematische Parameter, den wir deshalb oben auch nicht zu diskutieren brauchten, ist die Erdbeschleunigung g . Sie variiert im ganzen Erdmantel nur um etwa 5 % und kann im vorliegenden Zusammenhang bedenkenlos gleich 10^3 cm/sec^2 gesetzt werden. Als Schichtmächtigkeit wollen wir versuchsweise $D = 400 \text{ km}$ annehmen, da wir für diese Tiefe über das Zustandsdiagramm der Olivine (Abb. 4) die Temperatur einigermaßen zuverlässig abschätzen können. Mit $T(400 \text{ km}) \approx 1400^\circ\text{C}$ und einem mittleren adiabatischen Temperaturgradienten von etwa $0,5^\circ\text{C/km}$ erhält man einen mittleren überadiabatischen Temperaturgradienten $\beta \approx 3^\circ\text{C/km}$. Setzt man ferner $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$,

$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$ und $\nu = 10^{22} \text{ cm}^2/\text{sec}$ als Mittelwerte für den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, die Temperaturleitfähigkeit und die kinematische Viskosität, so erhält man für die Rayleigh-Zahl

$$R = \frac{\alpha \beta g D^4}{\nu} \approx 10^4$$

Dieser Wert liegt so deutlich oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl von etwa 10^3 , daß auch eine exaktere Theorie, die die Variation der Parameter mit der Tiefe berücksichtigen würde, kaum zu einer anderen Schlußfolgerung führen könnte, als daß im Erdmantel mit Konvektion zu rechnen sei.

Da die Schichtdicke D in der Rayleigh-Zahl mit der vierten Potenz enthalten ist, wird diese trotz der gegenläufigen Tendenz anderer Parameter noch beträchtlich größer, wenn wir beispielsweise $D = 800 \text{ km}$ statt $D = 400 \text{ km}$ ansetzen. Wir wollen davon aber zunächst absehen, da nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden darf, daß Konvektion über die Phasengrenzen in 400 und 650 km Tiefe hinweg überhaupt möglich ist. Frühere Untersuchungen zu diesem Problem haben zum Teil zu recht widersprüchlichen Ergebnissen geführt (VENING MEINESZ, 1957 u. 1962; KNOPOFF, 1964; VERHOOGEN, 1965; GEBRANDE, 1966; RICHTER, 1973). Wir werden später hierauf zurückzukommen haben.

Unabhängig von der Rayleigh-Zahl erkennt man die Notwendigkeit von Konvektion an den Ergebnissen, die man erhält, wenn man nur Wärmeleitung berücksichtigt. Unter Abschnitt 2.5. hatten wir gesehen, daß die radiogene Wärmeproduktion innerhalb der Kontinente bereits ausreichen dürfte, um den Wärmefluß an der Erdoberfläche zu decken. Unter den Ozeanen dagegen ist bei pyrolitischer Zusammensetzung des Erdmantels hierfür die Wärmeproduktion bis in 1500 km Tiefe erforderlich. Wir fragen uns nun, welchen Wärmestrom wir unter Ozeanen zu erwarten hätten, wenn die Wärme nur durch Leitung, d.h. ohne Konvektion transportiert würde. Als Randbedingung verwenden wir wieder die Temperatur von 1400°C

in 400 km Tiefe.

Die Antwort erhalten wir durch Lösung der stationären Wärmeleitungs-Gleichung

$$(3) \quad 0 = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + h;$$

h ist die Wärmeproduktion pro Zeit- und Volumeneinheit. In hinreichender Entfernung von den Kontinenten genügt es, den eindimensionalen, ebenen Fall

$$(4) \quad 0 = \frac{d}{dz}(\lambda \frac{dT}{dz}) + h$$

zu betrachten. Nach einer ersten Integration erhalten wir

$$j_0 = \lambda \frac{dT}{dz} + hz,$$

wobei die Integrationskonstante der gesuchte Wärmefluß an der Erdoberfläche ist. Seine Berechnung in Abhängigkeit von den Randbedingungen erfordert eine zweite Integration, wobei nun aber die Variation der Wärmeleitfähigkeit zu berücksichtigen ist. Nach den Ausführungen unter Abschnitt 2.4. bietet sich ein Ansatz der Form

$$(5) \quad \lambda = \lambda_0 \left(\frac{T_0}{T} \right) + \lambda_1 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3$$

an. Der erste Term beschreibt die Phononen-Leitung, der zweite die Wärmestrahlung. T_0 sei die Temperatur an der Erdoberfläche. Die Parameter λ_0 und λ_1 mögen so gewählt sein, daß (5) eine möglichst gute Approximation der wahren Leitfähigkeits-Verteilung im Erdinnern darstellt. Der Einfluß des Drucks möge also implizit in den Parametern enthalten sein. Die Integration von (4) unter Berücksichtigung von (5) liefert

$$j_0 z = \lambda_0 T_0 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \frac{\lambda_1 T_0}{4} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^4 - 1 \right] + \frac{h}{2} z^2$$

Die Randbedingung an der Oberfläche $T(0) = T_0$ ist hierin bereits enthalten. Durch Einsetzen der Temperatur T_D in der Tiefe D ergibt sich die gesuchte Beziehung für den Wärmefluß:

$$(6) \quad j_0 = \frac{\lambda_0 T_0}{D} \ln \frac{T_D}{T_0} + \frac{\lambda_1 T_0}{4 D} \left[\left(\frac{T_D}{T_0} \right)^4 - 1 \right] + \frac{h}{2} D$$

Mit $D=4 \cdot 10^7$ cm, $T_D=1700$ °K, $T_0=300$ °K und $h=10^{-14}$ cal/cm³sec

ergibt sich:

$$j_o = (1,3 \cdot 10^{-5} \lambda_o + 1,9 \cdot 10^{-3} \lambda_1) ^\circ K/cm \quad (6a) \\ + 2 \cdot 10^{-7} cal/cm^2 sec$$

Da bei Normaltemperatur die Strahlung noch keinen merklichen Beitrag liefert, ist λ_o praktisch gleich der Wärmeleitfähigkeit bei 300 $^\circ K$, d.h. für Olivin etwa gleich $10^{-2} cal/cm sec ^\circ C$ (STAUDACHER, 1971). Man könnte nun versuchen, λ_1 so zu bestimmen, daß j_o gleich dem Erdwärmestrom von $1,5 \cdot 10^{-6} cal/cm^2 sec$ wird. Das ergäbe $\lambda_1 \approx 6,2 \cdot 10^{-4} cal/cm sec ^\circ C$. Dieser Wert ist mindestens um den Faktor 10 zu groß. Wäre er richtig, so würde das Minimum der Wärmeleitfähigkeit etwa bei 160 $^\circ C$ liegen, was mit Sicherheit auszuschließen ist. Aus den Messungen an Olivin-Einkristallen von KANAMORI et al. (1968), die bisher den Einfluß der Strahlung am deutlichsten erkennen ließen, läßt sich etwa $\lambda_1 = 6,5 \cdot 10^{-5} cal/cm sec ^\circ C$ ablesen. Hiermit und mit $\lambda_o = 10^{-2} cal/cm sec ^\circ C$ folgt aus (6) bzw. (6a), daß der Erdwärmestrom im ozeanischen Bereich nur etwa $0,45 \cdot 10^{-6} cal/cm^2 sec$ betragen könnte, wenn der Wärmetransport in den oberen 400 km des Mantels nur durch Leitung (und Strahlung) erfolgen würde. Gut zwei Drittel des Erdwärmestromes müssen also unter den Ozeanen konvektiv transportiert werden.

Es ist dies eine ganz wichtige Bedingung, die an jede geodynamische Theorie zu stellen ist: sie muß quantitativ erklären, weshalb der terrestrische Wärmefluß auf den Ozeanböden im Mittel etwa dreimal größer ist, als aufgrund der Wärmeleitung zu erwarten wäre.

Welche Forderungen haben wir darüberhinaus an eine befriedigende Theorie der Geodynamik zu stellen?

Es empfiehlt sich, diese Forderungen nicht zu hoch anzusetzen. Wir haben gesehen, daß wir über eine ganze Reihe von physikalischen Eigenschaften, die für geodynamische Vorgänge bedeutsam sind, nur grobe Kenntnisse haben. Von einem pragmatischen

Standpunkt aus scheint es daher zum jetzigen Zeitpunkt wenig zweckmäßig, aufwendige geodynamische Theorien zu entwickeln, die sehr detaillierte Kenntnisse über die verschiedenen physikalischen Parameter voraussetzen. Solange diese Kenntnisse nicht vorliegen, könnten solche Theorien auch nicht quantitativ nachgeprüft werden. Unter diesen Umständen geben wir einer möglichst einfachen, physikalisch überschaubaren Theorie, die an ihren Ergebnissen quantitativ überprüft werden kann, den Vorzug. Wir können von einer solchen Theorie natürlich nicht erwarten, daß sie eine im Detail zutreffende Beschreibung der geotektonischen Vorgänge liefert. Wenn wir beispielsweise das rheologische Verhalten des Erdinnern in stark vereinfachter Weise durch eine konstante Viskosität, also einen einzigen Parameter, approximieren, bedeutet dies einen Verzicht auf die Beschreibung solcher Elemente der Geotektonik, die offensichtlich die Folge des nicht-viskosen Verhaltens der Lithosphäre sind. Die in sich relativ homogene Bewegung großer Areale (Platten) und die Konzentration der Geschwindigkeitsgradienten auf relativ schmale Zonen gehören hierzu.

Die Frage, ob unter derartig idealisierten Voraussetzungen, wie z.B. die einer konstanten Viskosität, eine Theorie überhaupt noch sinnvolle Ergebnisse liefern kann, ist nicht von der Hand zu weisen. Man wird sie jedoch im allgemeinen nicht a priori, sondern erst im Vergleich mit den Beobachtungen und mit den Ergebnissen verbesserter Theorien beantworten können. Die Prinzipien der Abstraktion und Vereinfachung haben sich jedenfalls innerhalb der exakten Naturwissenschaften als nützlich und für die weitere Entwicklung förderlich erwiesen. Das Arbeiten mit vereinfachten Modellen hat gerade in der Geophysik - man denke nur an die Methoden der Gravimetrie, Magnetik und Seismik - eine langjährige und erfolgreiche Tradition, sodaß es naheliegend ist, in der Geodynamik ähnlich zu verfahren. (Einige Verständnisschwierigkeiten zwischen Geowissenschaftlern, z.B. in der Diskussion über

die "Platten-Tektonik", beruhen offensichtlich darauf, daß der selbstverständliche Umgang von Geophysikern mit vereinfachten Modellen in den stärker phänomenologisch orientierten Nachbarwissenschaften keine entsprechende Tradition hat.)

Wir kommen auf die Frage zurück, was wir von einer einfachen Theorie thermischer Konvektion verlangen wollen. Sie wäre wohl nicht erfolglos zu nennen, wenn sie folgende Beobachtungen grob erklären könnte:

1. den mittleren Wärmefluß von $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$ an den Ozeanböden (LEE, 1970);
2. Geschwindigkeiten an der Erdoberfläche von der Größenordnung 1 bis 10 cm/Jahr (z.B. LePICHON, 1968);
3. den mittleren Abstand zwischen den Bereichen konvergierender und divergierender Bewegung;
4. Niveau-Unterschiede der Ozeanböden von der Größenordnung $\pm(2000 \text{ bis } 4000) \text{ m}$;
5. Scherspannungen der Größenordnung 100 bar im Erdmantel, wie sie aufgrund der beobachteten großräumigen Schwereanomalien (JEFFREYS, 1959) und aufgrund des Spannungsabfalls bei Erdbeben (LOMNITZ, 1974) abgeleitet werden;
6. eine Konzentration der maximalen Scherspannungen auf relativ schmale Zonen, wie sie sich in der Seismizität der Erde widerspiegelt (BARAZANGI u. DORMAN, 1969);
7. großräumige Freiluft-Anomalien des Schwerefeldes mit Amplituden von $\pm(20 \text{ bis } 40) \text{ mgal}$ (GAPOSCHKIN u. LAMBECK, 1971)
und
8. sollte der mechanische Wirkungsgrad der Konvektion groß genug sein, um neben der Energie, die zur Überwindung der inneren Reibung erforderlich ist, auch noch die Energien liefern zu können, die für seismische und tektonische Vorgänge benötigt werden.

Zum letzten Punkt müssen wir etwas ausführlicher werden.

Die jährlich durch Erdbeben freigesetzte Energie ist einiger-

maßen zuverlässig bekannt. Im Mittel beträgt sie seit Beginn dieses Jahrhunderts etwa $5,7 \cdot 10^{24}$ erg/Jahr. Zum Teil werden hiervon stark abweichende Werte angegeben, was offensichtlich in einer kontinuierlichen Abnahme der Seismizität in den letzten Jahrzehnten begründet ist. Nach BATH (1973) betrug das Mittel für 1897 bis 1917 noch $8,5 \cdot 10^{24}$ erg/Jahr, für 1917 bis 1970 aber nur $4,4 \cdot 10^{24}$ erg/Jahr. Für den Zeitraum von 1953 bis 1965 gibt ROTHE (1969) einen Mittelwert von $1,22 \cdot 10^{24}$ erg/Jahr an.

Die Tatsache, daß die durch den Erdwärmestrom transportierte Energie mit rund 10^{28} erg/Jahr die seismisch umgesetzte Energie etwa um den Faktor $2 \cdot 10^3$ übertrifft, wird gewöhnlich als hinreichende Garantie dafür angesehen, daß thermische Konvektion ein effektiver Antriebsmechanismus für geotektonische Prozesse sein kann. Bei dieser Überlegung bleibt unberücksichtigt, daß die bei Konvektion umgesetzte mechanische Energie zum überwiegenden Teil durch innere Reibung dissipiert wird und daß darüberhinaus auch Energie für tektonische Prozesse benötigt wird. Im folgenden soll dieser letzte Anteil abgeschätzt werden.

Die Energie, die bei tektonischen Prozessen in Wärme zurückverwandelt wird, brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, da wir sie zur inneren dissipierten Energie rechnen können. Getrennt zu behandeln ist aber die potentielle Energie, die zur Aufwölbung von Gebirgen und für epirogenetische Hebungsvorgänge benötigt wird. Man wird wohl kaum von vornherein annehmen dürfen, daß diese Energie gegenüber der Energie der Erdbeben vernachlässigt werden kann.

Unabhängig davon, ob die potentielle Energie direkt zur Anhebung der Erdoberfläche oder zunächst für eine Versenkung leichteren Materials in größere Tiefen ("Gebirgswurzeln") aufgewendet wird, wird sie letztlich in jedem Fall im exogenen Kreislauf durch Erosion dissipiert. Wenn wir annehmen - und

hierzu berechtigt uns das in der Geologie mit Erfolg angewendete "Prinzip des Aktualismus" -, daß die Erdoberfläche in der geologischen Vergangenheit im Mittel das gleiche Relief wie heute hatte - präziser: daß die hypsographische Kurve in der Vergangenheit im wesentlichen mit der heutigen identisch war - dann muß die durch Erosion dissipierte potentielle Energie immer wieder durch endogene Prozesse nachgeliefert worden sein. Bei Kenntnis der mittleren Erosionsrate können wir diese Energie abschätzen:

Ist d der Höhenunterschied zwischen dem Abtragungs- und dem Sedimentationsniveau, so wird bei der Erosion der Masse m auf dem Weg vom Abtragungsraum zum Sedimentationsraum die Energie mgd vergeudet. Die Masse der Feststoffe, die durch die Flüsse jährlich ins Meer verfrachtet werden, beträgt nach WEDEPOHL (1969) etwa 10^{16} g/Jahr; nach FOSTER (1971) sind es $4 \cdot 10^{16}$ g/Jahr. Da die Erosion in den Gebirgen besonders intensiv ist, können wir als mittleren Niveau-Unterschied zwischen Abtragungs- und Sedimentationsraum etwa 2000 bis 3000 m ansetzen. Wir gelangen damit zu einer Abschätzung der durch Erosion vergeudet und langfristig durch endogene Prozesse wieder nachgelieferten Energie von

$$E_{\text{pot}} \approx (2 \text{ bis } 12) \cdot 10^{24} \text{ erg/Jahr.}$$

Die Küstenerosion durch das Meer ist in dieser Abschätzung nicht berücksichtigt. Sie dürfte aber energetisch unbedeutend sein, da hier der Unterschied zwischen dem Abtragungs- und Sedimentationsniveau nur gering ist. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß die endogenen Prozesse zusätzlich zur seismisch umgesetzten Energie noch einen Betrag von etwa gleicher Größenordnung für die Aufrechterhaltung des Reliefs der Erdoberfläche liefern müssen.

Man könnte einwenden, daß die obige Abschätzung auf Angaben über die Flußfracht beruht, die auf die Vergangenheit nicht übertragen werden können. Eine Abschätzung der Erosionsrate

ist aber auch für die geologische Vergangenheit möglich, wenn man davon ausgeht, daß sich die Gesamtmasse der Sedimente und die mittlere Erosionsrate nicht wesentlich geändert haben. Nach GARRELS et al. (1972) kann dies aufgrund geochemischer Untersuchungen für die letzten 2 Milliarden Jahre angenommen werden. Ist M die Gesamtmasse der Sedimente und $\dot{m}$ die Erosionsrate, so folgt unter den erwähnten Voraussetzungen, daß die Masse $m(t, \tau)$ der Sedimente, die vor der Zeit τ gebildet wurden und zur Zeit t noch vorhanden sind, durch die Exponential-Verteilung

$$m(t, \tau) = M \cdot e^{-(\dot{m}/M)(t-\tau)}$$

beschrieben wird. Aus dieser Verteilung folgt, daß zu einem beliebigen Zeitpunkt t die Hälfte der vorhandenen Sedimente jünger und die Hälfte älter als $(M/\dot{m}) \cdot \ln 2$ sein muß. Nach GARRELS et al. (1972) beträgt die Gesamtmasse der heute vorhandenen Sedimente $3,2 \cdot 10^{24} \text{ g}$, wovon die Hälfte jünger bzw. älter als $5 \cdot 10^8$ Jahre ist. Daraus errechnet man für die geologische Vergangenheit eine mittlere Erosionsrate $\dot{m} \approx 0,64 \cdot 10^{16} \text{ g/Jahr}$. Dieser Wert ist zwar etwas kleiner, aber von derselben Größenordnung wie die Angaben, die für die Flußfracht in der Gegenwart gemacht werden. Er ändert nichts an der Schlußfolgerung, daß bei der Diskussion des Energieumsatzes geodynamischer Prozesse neben der Energie der Erdbeben noch ein Betrag gleicher Größenordnung in Betracht gezogen werden muß, der zur Kompensation der Abtragung aufzuwenden ist.

(In diesem Zusammenhang ist noch eine andere Zahlenkombination erwähnenswert. Geht man davon aus, daß etwa 80 % der gesamten Erosionsrate den jungen Gebirgen zuzuordnen ist, deren Fläche von WEDEPOHL (1969) mit $0,5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$ angegeben wird, so ergibt sich für die jungen Gebirge eine mittlere Hebungsrate von 0,05 bis 0,26 mm/Jahr. Da es sich hier um eine Abschätzung des weltweiten Mittels handelt, können lokal oder vorübergehend sicher auch wesentlich größere Hebungsgeschwindigkeiten auftreten. Im Rahmen dieser Abschätzung ist der Mittelwert von

ca. 0,24 mm/Jahr, den SENFTL und EXNER (1973) für die Hohen Tauern seit dem Jung-Tertiär aufgrund geologischer Beobachtungen abgeleitet haben, als normal anzusehen. Die rezente Relativ-Hebung von ca. 1 mm/Jahr, die von SENFTL und EXNER durch Wiederholungs-Nivellements bestimmt wurde, dürfte dagegen als lokaler oder geologisch kurzzeitiger Effekt zu deuten sein.)

4. Die Grundgleichungen thermischer Konvektion

Wir wenden uns nun der mathematischen Beschreibung thermischer Konvektion zu. Die Grundgleichungen thermischer Konvektion ergeben sich aus den fundamentalen Bedingungen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung. Die einem Kontinuum angemessene Formulierung dieser Erhaltungssätze sind die Kontinuitätsgleichung (7), die Bewegungsgleichungen (8) und die allgemeine Wärmeleitungsgleichung (9).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \operatorname{div}(\sigma_{ki}) \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) = \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\Phi}{T} + \frac{h}{T} \quad (9)$$

Die verwendeten Symbole haben die Bedeutung: ρ = Dichte, $\vec{v}$ = Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, t = Zeit, g = Erdbeschleunigung, p = Druck, σ_{ki} = deviatorischer Spannungstensor, T = absolute Temperatur, s = Entropie pro Masseneinheit, λ = Wärmeleitfähigkeit, h = Wärmeproduktion pro Volumen- und Zeiteinheit z.B. radiogenen Ursprungs, Φ = Energiedissipation durch irreversible Prozesse. Tiefgestellte Indizes bezeichnen die entsprechenden Komponenten von Vektoren und Tensoren. Der Energie-Satz bzw. die Wärmeleitungsgleichung ist hier nach dem Zweiten Hauptsatz der Wärmelehre unter Verwendung der Zustandsgröße Entropie formuliert.

Die drei Grundgleichungen haben eine gewisse formale Ähnlichkeit: Auf der linken Seite steht jeweils die zeitliche Änderung einer Größe plus der Änderung dieser Größe, die mit der Divergenz der Strömung verbunden ist; auf der rechten Seite stehen die Änderungen, die durch innere Quellen und durch Einflüsse über die Oberfläche des Volumenelementes verursacht werden. Im Falle der Bewegungsgleichungen sind die zeitliche Änderung des Impulses in i -Richtung und die Divergenz des Impuls-Stromes im Gleichgewicht mit der i -Komponente der Schwerkraft und den an der Oberfläche angreifenden Kräften von Druck und Spannungstensor. Im Falle der Wärmeleitungsgleichung werden die zeitliche Entropie-Änderung und die Divergenz des Entropie-Stromes durch die Entropie-Produktion infolge Wärmeleitung, Dissipation mechanischer Energie und innerer Wärmequellen kompensiert.

Die Gleichungen (7) und (8) dürften allgemein als elementar und keines weiteren Beweises bedürftig angesehen werden. Von der Gleichung (9) wird dies nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden dürfen. Es könnte eingewendet werden, daß hier die Entropie mit irreversiblen Vorgängen verknüpft wird, obwohl sie im Rahmen der normalen Thermodynamik - die ja, wie DE GROOT (1960) bemerkt, besser als "Thermostatik" zu bezeichnen wäre - in Verbindung mit reversiblen Zustandsänderungen definiert wird. Um diesbezüglichen Zweifeln zu begegnen, die angesichts der in der Literatur anzutreffenden unterschiedlichen, zum Teil widersprüchlichen Versionen der Wärmeleitungsgleichung durchaus angemessen sind, wird im Anhang I dargelegt werden, wie die Gleichung (9) in Verbindung mit den Gleichungen (7) und (8) aus dem Energiesatz folgt. Hierbei wird auch deutlich, daß die Entropie in Gleichung (9) tatsächlich die in der normalen Thermodynamik übliche Bedeutung hat.

Das Gleichungssystem (7) bis (9) ist für sich genommen noch nicht lösbar, da es mehr Unbekannte enthält als Gleichungen

zur Verfügung stehen. Es wird lösbar, wenn zusätzlich Materialgleichungen bekannt sind, welche die Spannungen mit den Geschwindigkeiten bzw. Geschwindigkeitsänderungen und die Dichte und Entropie mit Druck und Temperatur verknüpfen. Mit der Kenntnis der Beziehung zwischen Spannungstensor und Geschwindigkeitsfeld, also der Rheologie, ist auch die Dissipationsfunktion Φ bekannt. Sie stellt also keine zusätzliche Unbekannte dar.

Im Gegensatz zu den Gleichungen (7) bis (9) bezeichnen wir die Materialgleichungen nicht als Grundgleichungen, da sie nicht allgemein gültig, sondern für verschiedene Materialien unterschiedlich sind.

Trotz der Vorbehalte, die sich aus den Ausführungen unter 2.6. ergeben, sehen wir uns gezwungen, die Rheologie des Erdinneren durch eine Newton'sche Viskosität η zu beschreiben. Der Spannungs-Tensor $\bar{\sigma}_{ik}$ ist dann mit den Komponenten der Geschwindigkeits-Gradienten $\partial v_i / \partial x_k$ über die Gleichung (10) verknüpft.

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div}(\vec{v}) \right) \quad (10)$$

δ_{ik} ist der bekannte Delta-Operator, also gleich 1 für $i=k$ und andernfalls gleich 0. Gleichung (10) ist nicht der allgemeinste lineare Ansatz, der in einem isotropen Medium denkbar ist. Außer der Viskosität η könnte in (10) theoretisch noch eine weitere Zähigkeits-Konstante, die sogenannte Volumen-Viskosität, auftreten, die mit $\operatorname{div} \vec{v}$, also mit Dichteänderungen gekoppelt wäre. Über diese Volumen-Viskosität ist selbst in einfachen Medien kaum etwas bekannt. Experimentell konnte sie noch in keinem Fall bestimmt werden. Theoretisch kann aber gezeigt werden, daß sie für ideale, einatomige Gase gleich 0 und sonst größer als 0 sein muß (MORGENSTERN u. SZABO, 1961). In Ermangelung weiterer Anhaltspunkte wurde die Volumen-Viskosität in Gleichung (10) von vornherein vernachlässigt.

Mit dem Ansatz (10) für den Spannungstensor ist auch die Dissipationsfunktion festgelegt. Allgemein kann geschrieben werden

$$(11) \quad \Phi = [(\sigma_{ik})_{\text{grad}}] \vec{v},$$

wobei $[(\sigma_{ik})_{\text{grad}}]$ als tensorielles Produkt zwischen dem Spannungs-Tensor und dem Spaltenvektor mit den Komponenten $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ aufzufassen ist. Explizit ergibt sich mit dem Ansatz (10):

$$(11a) \quad \begin{aligned} \Phi = 2\eta \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \eta \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\}^2 \\ + \eta \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Um die spezifische Entropie s und die Dichte ρ mit dem Druck p und der Temperatur T zu verknüpfen, werden wir zunächst mit differentiellen thermodynamischen Beziehungen wie

$$(12) \quad ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp = \frac{c_p}{T} \left[dT - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp \right]$$

bzw.

$$(12a) \quad \text{grad } s = \frac{c_p}{T} \left[\text{grad } T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \text{grad } p \right]$$

und

$$(13) \quad d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp = -\rho \alpha dT + \frac{\rho}{k_T} dp$$

bzw.

$$(13a) \quad \text{grad } \rho = -\rho \alpha \text{grad } T + \frac{\rho}{k_T} \text{grad } p$$

auskommen; später werden wir aber annehmen müssen, daß die Gleichungen (12) und (13) nicht nur im Differentiellen, sondern auch bei größeren Druck- und Temperaturänderungen gültig bleiben, wobei die partiellen Ableitungen als konstant angesehen werden dürfen.

4.1. Allgemeine Folgerungen aus den Grundgleichungen.

Einige Aussagen können direkt aus den Erhaltungssätzen (7) und (8) abgeleitet werden, ohne daß von den Material-Gleichungen Gebrauch gemacht werden muß. Zu diesem Zweck integrieren wir die Gleichungen (7) und (8) über ein Volumen V , welches, wie in Abb. 7 skizziert, durch die Erdoberfläche, die Horizontal-Fläche in der Tiefe z und geeignet gewählte seitliche Begrenzungsflächen eingeschlossen wird.

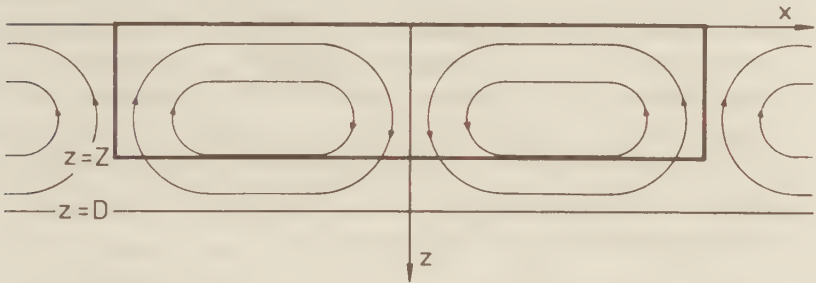


Abb. 7: Integrationsgebiet für die Integration der Grundgleichungen nach dem Gauss'schen Satz.

Der Einfachheit halber sei Konvektion in Form langgezogener paralleler Konvektions-Rollen vorausgesetzt, deren Achsen senkrecht zur x - z -Ebene orientiert sein mögen. Durch experimentelle und theoretische Untersuchungen (SCHLÜTER et al., 1965; BUSSE, 1967) ist bekannt, daß diese Form der Konvektion für Rayleigh-Zahlen zwischen der kritischen und etwa der zehn- bis zwanzigfachen kritischen Rayleigh-Zahl die alleinige stabile Lösung ist. Wir wählen die seitlichen Begrenzungen des Integrationsgebiets in diesem Fall gerade so, daß eine Wellenlänge des Konvektionssystems im Innern liegt. (Bei begrenzter Ausdehnung des Konvektionssystems wären die seitlichen Begrenzungen in hinreichend großem Abstand zu wählen, so daß

die Strömung ganz im Innern liegt. Wenn Konvektion zwischen Kugelschalen betrachtet wird, werden keine seitlichen Begrenzungen benötigt.)

Die Integration der Kontinuitätsgleichung (7) liefert:

$$\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau + \iint_{F(V)} \rho \vec{v} d\vec{f}$$

Die Differentiation nach der Zeit wurde hier vor das Integral gezogen und das Volumen-Integral über $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$ nach dem Gauss'schen Satz in ein Integral über die Oberfläche $F(V)$ umgewandelt. Es sei nun vorausgesetzt, daß die Masse im Integrationsgebiet konstant bleiben möge, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau = 0$. Lokale zeitliche Änderungen der Dichte, die mit dieser Bedingung verträglich sind, können aber zugelassen werden. Zum Oberflächen-Integral liefert nur die untere Begrenzung einen Beitrag, da in den übrigen Begrenzungsflächen die Geschwindigkeit keine Normal-Komponente hat. Man erhält also

$$(14) \quad \sigma = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \rho w dx,$$

wobei w die vertikale Komponente der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist. Da sich die Dichte ρ in konstanter Tiefe nur wenig ändern dürfte, kann näherungsweise auch

$$(14a) \quad \sigma = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} w dx = \bar{w}$$

geschrieben werden.

Wir haben hier eine abkürzende Schreibweise verwendet, derer wir uns im folgenden häufiger bedienen werden: Entsprechend der Definition

$$\overline{G(z)} = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} G(x, z) dx$$

kennzeichnen wir die Mittelung einer Funktion $G(x, z)$ über die Horizontale in der Tiefe z durch einen Querstrich.

Analog wie die Kontinuitätsgleichung (7) können wir auch die Bewegungsgleichungen (8) über das Volumen der Abb. 7 integrieren. Da der Gesamtimpuls konstant bleiben soll, ergibt sich nach Umwandlung der Divergenz-Ausdrücke in Oberflächen-Integrale:

$$\overline{\rho v_x w} = \int_0^z (\overline{\rho g_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}) dz + \overline{\sigma_{2i}}$$

Da g keine x -Komponente hat, $\bar{p}$ nur von z abhängig ist und $\overline{\sigma_{zx}}$ aus Symmetriegründen gleich 0 ist, folgt für die x -Komponente $\overline{\rho u w} = \sigma_{ij}(u = v_x)$. Die z -Komponente liefert:

$$\bar{p} - \overline{\sigma_{zz}} = \int_0^z \bar{\rho g} dz - \overline{\rho w^2} \quad (15)$$

Eine Abschätzung der verschiedenen Terme dieser Gleichung zeigt, daß der in w quadratische Term für geodynamische Anwendungen bedenkenlos vernachlässigt werden kann. Gleichung (15) besagt dann, daß unabhängig von der Rheologie der mittlere Normaldruck $\bar{p} - \overline{\sigma_{zz}}$ auf die Fläche $z = \text{konst.}$ gleich dem hydrostatischen Druck ist. Wenn die Rheologie durch Gleichung (10) beschrieben wird, folgt:

$$\overline{\sigma_{zz}} = 2\gamma \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \frac{1}{3} \overline{\text{div } \vec{v}} \right) = 2\gamma \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{3} \overline{\vec{v} \cdot \frac{\text{grad } \rho}{\rho}} \right)$$

Da die größte Komponente von $\text{grad } \rho$ die z -Komponente ist, also $\vec{v} \cdot \text{grad } \rho \approx w \frac{\partial \rho}{\partial z}$, und $\bar{w}$ näherungsweise gleich 0 ist (Gleichung 14a), kann auch $\overline{\sigma_{zz}}$ gegenüber $\bar{p}$ vernachlässigt werden, d.h. näherungsweise ist der mittlere Druck in der Tiefe z gleich dem hydrostatischen Druck. Durch die Strömung wird zwar die Druckverteilung geändert, nicht aber der Mittelwert des Drucks in einer bestimmten Tiefe. Eine analoge Aussage über die Temperatur ist nicht möglich, wie später noch zu zeigen sein wird.

4.2. Vereinfachung der Grundgleichungen.

Durch partielle Differentiation der linken Seite von Gleichung (8) unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (7) und durch Einsetzen der Beziehung (10) auf der rechten Seite von (8) erhält man bei konstanter Viskosität die bekannten Navier-Stokes-Gleichungen

$$(16) \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + \frac{2}{3} \text{ grad div } \vec{v}$$

Eine analoge Umformung der linken Seite von (9) führt nach Multiplikation mit T auf:

$$(17) \quad T \rho \frac{\partial s}{\partial t} + T \rho \vec{v} \text{ grads} = \text{div}(\lambda \text{ grad } T) + h + \phi$$

Da wir im folgenden die Eigenschaften stationärer Konvektion untersuchen wollen, brauchen wir die Ableitungen nach der Zeit nicht weiter zu berücksichtigen. Mit Hilfe von (12a) kann man in (17) die Entropie eliminieren und erhält:

$$(18) \quad \rho \vec{v} \cdot \left(\text{grad } T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \text{ grad } p \right) = \text{div}(\lambda \text{ grad } T) + h + \phi$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, daß sich die Temperatur in einer nicht-leitenden ($\lambda=0$), idealen ($\eta=0$) Flüssigkeit ohne innere Wärmequellen ($h=0$) längs der Stromlinien adiabatisch ändert.¹⁾

Konvektion wurde bisher fast ausschließlich im Rahmen der Boussinesq - Approximation behandelt, d.h. die Dichte wurde in allen Termen mit Ausnahme des Terms $\rho \vec{g}$ in Gleichung (16) als konstant angenommen und die Strömung daher als inkom-

1) Diese Aussage scheint trivial. Sie ist aber nicht überflüssig, da in vielen Arbeiten über Konvektion (z.B. in dem Standard-Werk von CHANDRASEKHAR, 1961, und als Folge hiervon bei KOPAL, 1963; WALZER, 1973 und anderen) eine inkorrekte Wärmeleitungsgleichung verwendet wird, aus der die obige Aussage nicht folgt.

pressibel ($\text{div} \vec{v} = 0$) behandelt. Wir wollen im folgenden versuchen, mit etwas weniger drastischen Annahmen auszukommen. Einige weitere Vereinfachungen sind jedoch für eine analytische Behandlung der Gleichungen (16) und (18) unvermeidbar.

Es erweist sich als zweckmäßig, zunächst die Größen T , p und ρ gemäß

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} + \delta T \\ p &= \bar{p} + \delta p \\ \rho &= \bar{\rho} + \delta \rho \end{aligned} \quad (19)$$

in mittlere Anteile, die nur von der Tiefe z abhängen, und restliche Anteile, die im allgemeinen von allen drei Koordinaten abhängen, zu zerlegen. Der Querstrich wird hier also im Sinne der Definition auf Seite 42 verwendet. Die Größen mit dem Querstrich brauchen jedoch mit der Lösung der Differentialgleichungen im statischen Fall nicht übereinzustimmen. Für homogene Phasen gilt allgemein:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\alpha T}{\rho c_p}$$

Näherungsweise gilt daher:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \text{grad} p = \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}}\right)_s + \frac{\alpha \delta T}{\rho c_p}\right] \text{grad} \bar{p} = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}}\right)_s \text{grad} \bar{p} + \frac{\alpha \delta T}{\rho c_p} \bar{\rho} \vec{g}$$

In (18) eingesetzt folgt:

$$\rho \vec{v} \left[\text{grad} T - \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}}\right)_s \text{grad} \bar{p} \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + h + \Phi + \alpha \rho g w \delta T \quad (18a)$$

Wenn c_p und $(\partial T / \partial p)_s$ näherungsweise als konstant angesehen werden, läßt sich die linke Seite in einen Divergenz-Ausdruck umwandeln. Durch Zusammenfassen der Divergenz-Ausdrücke erhält man schließlich:

$$\text{div} \left\{ \rho \vec{v} \left[T - \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}}\right)_s \bar{p} \right] - \lambda \text{grad} T \right\} = h + \Phi + \alpha \rho g w \delta T$$

In dieser Form werden wir die Wärmeleitungsgleichung den weiteren Untersuchungen zugrunde legen. Zunächst soll jedoch noch Gleichung (16) vereinfacht werden. Das in $\vec{v}$ quadratische Glied auf der linken Seite kann wegen der extrem lang-

samen Strömungsgeschwindigkeiten von wenigen cm/Jahr bedenkenlos vernachlässigt werden. Da nach Seite 43 der mittlere Druck in der Tiefe z gleich dem hydrostatischen Druck ist, fallen die gemittelten Größen auf der rechten Seite heraus. Bezüglich der Reibungs-Terme schließen wir uns der üblichen Boussinesq - Approximation an und vernachlässigen den Term mit $\text{grad div } \vec{v}$. Diese Vernachlässigung dürfte kaum ins Gewicht fallen, da die Rheologie des Erdmantels ohnehin nur ungenau bekannt ist und bereits die Annahme einer konstanten Viskosität ziemlich fragwürdig ist. Wir können uns daher auch die Freiheit nehmen, nicht die Viskosität η , sondern die kinematische Viskosität ν als konstant anzunehmen und die Dichte mit unter den Laplace-Operator zu ziehen. Statt (16) erhalten wir dann:

$$(20) \quad \sigma = \delta \rho \vec{g} - \text{grad} \delta p + \nu \Delta(\rho \vec{v})$$

Die Dichte-Variation $\delta \rho$ kann durch eine linearisierte Zustandsgleichung

$$\delta \rho = \rho_0 \left(\frac{\delta p}{k_T} - \alpha \delta T \right)$$

ausgedrückt werden. Wir wollen uns hier mit dem Fall begnügen, daß die Dichteänderung durch die Druck-Variation gegenüber der Dichteänderung durch die Temperatur-Variation vernachlässigt werden kann. Die Berechtigung dieser Annahme werden wir später anhand der Lösung zu prüfen haben.

Zusammenfassend lauten die Gleichungen, mit denen wir weiterarbeiten wollen, wie folgt:

$$(21) \quad \sigma = \text{div}(\rho \vec{v})$$

$$(22) \quad \sigma = -\alpha \rho \delta T \vec{g} - \text{grad} \delta p + \nu \Delta(\rho \vec{v})$$

$$(23) \quad \text{div} \left\{ c_p \rho \vec{v} \left[T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) \bar{p} \right] - \lambda \text{grad} T \right\} = h + \Phi + \rho w \alpha \delta T g$$

Die Boussinesque-Approximation führt im stationären Fall dagegen auf das Gleichungssystem (z.B. McKENZIE et al., 1974):

$$0 = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma = -\alpha \rho_0 \delta T \vec{g} - \operatorname{grad} \delta p + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \{ \rho_0 \eta \vec{v} T - \lambda \operatorname{grad} T \} = h$$

Bei Annahme einer konstanten Dichte und bei Vernachlässigung einiger Terme in der Wärmeleitungsgleichung geht das Gleichungs-System (21) bis (23) in das obige System über.

4.3. Der Wirkungsgrad thermischer Konvektion.

Bereits SCHWINNER (1920) hat darauf hingewiesen, daß thermische Konvektion als eine Art Wärmekraftmaschine betrachtet werden kann. Diese Betrachtungsweise ist mehrfach aufgegriffen worden, doch scheint eine konsequente Untersuchung des Wirkungsgrades thermischer Konvektion bisher nicht vorzuliegen.

Als Wirkungsgrad der Konvektion können wir das Verhältnis von mechanisch umgesetzter zu thermisch umgesetzter Energie pro Zeiteinheit definieren. Zur mechanischen Energie gehören die durch innere Reibung dissipierte Energie, die durch Erdbeben dissipierte elastische Energie und die durch Erosion dissipierte potentielle (tektonische) Energie. Da in einem quasi-stationären Zustand¹⁾ die gesamte mechanische Energie auf verschiedenen Umwegen wieder in Wärme zurückverwandelt wird, können die verschiedenen Anteile in der Dissipationsfunktion Φ zusammengefaßt werden. Die thermisch umgesetzte Energie ist gleich der Energie des Erdwärmestromes.

¹⁾ Als quasi-stationär wird hier ein Zustand bezeichnet, der nicht streng, aber im Mittel über größere Volumina und über größere Zeiten hinweg stationär ist.

Indem wir die Wärmeleitungsgleichung (23) analog wie zuvor unter 4.1. die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Gauss'schen Satzes über das in Abb. 7 angedeutete Volumen integrieren, erhalten wir:

$$(24) \quad \overline{\rho w \left[T - \left(\frac{\partial T}{\partial p_s} \right) p \right]} - \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right)_z + \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right)_0 = hz + \int_0^z (\Phi + \overline{\alpha g \rho w \delta T}) dz$$

Die Integration über die Horizontal-Fläche ist wie bisher durch den Querstrich symbolisiert. Die seitlichen Begrenzungen tragen nichts bei, da hier sowohl der Strömungsvektor $\vec{v}$, wie auch der Wärmestrom $\lambda \text{grad} T$ tangential gerichtet sind. Wegen $\overline{\rho w} = 0$ (Gl. 14) und $T = \bar{T} + \delta T$ läßt sich Gleichung (24) wie folgt vereinfachen:

$$(25) \quad \overline{\rho \rho w \delta T} - \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right)_z + \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right)_0 = hz + \int_0^z (\Phi + \overline{\alpha g \rho w \delta T}) dz$$

Der erste Term links beschreibt offensichtlich den mittleren konvektiven Wärmefluß und der zweite den mittleren Wärmefluß durch Leitung in der Tiefe z ; der dritte Term ist der Wärmefluß an der Erdoberfläche; die Vorzeichen erklären sich durch die Wahl der positiven z -Richtung nach unten. Auf der rechten Seite stehen die maßgeblichen Wärmequellen. Neben der radio-genen Wärmeproduktion und der Wärmeproduktion durch Dissipation mechanischer Energie beschreibt der dritte Term die Wärmeproduktion durch Kompression bzw. Dilatation. Während die ersten beiden Terme nur positiv sein können, kann der dritte auch negativ sein.

Wenn die Wärmeleitungsgleichung (23) über die gesamte Mächtigkeit der konvektierenden Schicht integriert wird, ist in (25) $z=D$ zu setzen. Da für $z=D$ die Vertikal-Komponente der Geschwindigkeit gleich Null ist, und da aus Gründen der Energie-Erhaltung im quasi-stationären Fall der Wärmefluß an der

Oberfläche gleich dem Wärmefluß in der Tiefe D plus der pro Flächeneinheit in der Schicht produzierten radiogenen Wärme hD sein muß, erhält man

$$\int_0^D (\bar{\Phi} + \overline{\alpha g \rho_w \delta T}) dz = 0 \quad (26)$$

Diese Beziehung erlaubt eine einfache physikalische Deutung: Integriert über die gesamte Schicht ist die pro Zeiteinheit dissipierte mechanische Energie gleich der Leistung der Auftriebskräfte.

Die Tatsache, daß sich die dissipierte Energie und die Auftriebs-Energie pauschal gesehen gegenseitig kompensieren, ermutigt dazu, in Gleichung (25) das betreffende Integral auf der rechten Seite in erster Näherung zu vernachlässigen. Diese Näherung gilt streng, wenn Auftriebs- und Reibungskräfte nicht nur pauschal innerhalb der ganzen Schicht, sondern auch innerhalb jeder Horizontal-Ebene im Gleichgewicht sind. Aus (25) folgt dann:

$$\overline{\rho_w \delta T} = \frac{1}{c_p} \left(hz + \lambda \frac{d\bar{T}}{dz} - j_0 \right)$$

In (26) eingesetzt, ergibt sich:

$$\int_0^D \bar{\Phi} dz = \frac{\alpha g D}{c_p} \int_0^D \left(j_0 - hz - \lambda \frac{d\bar{T}}{dz} \right) dz \quad (27)$$

Wenn λ als konstant angesehen werden kann, liefert die Integration der rechten Seite von (27):

$$\int_0^D \bar{\Phi} dz = \frac{\alpha g D}{c_p} \left(j_0 - \frac{hD}{2} - \lambda \frac{T_0 - T_D}{D} \right) \quad (28)$$

Die Wärmeproduktion hD kann gemäß

$$j_0 - j_D = hD$$

durch den Wärmefluß j_D in der Tiefe D und den Wärmefluß an der Erdoberfläche ausgedrückt werden. In (28) eingesetzt, erhält man nach Division durch j_0 die gesuchte Beziehung

für den Wirkungsgrad der Konvektion:

$$(29) \quad W = \frac{\int_0^D \Phi dz}{j_0} = \frac{\alpha g D}{\zeta} \left(\frac{j_0 + j_D}{2j_0} - \frac{\lambda \frac{T_D - T_0}{D}}{j_0} \right)$$

Der Wirkungsgrad thermischer Konvektion wird also vorwiegend durch die dimensionslose Zahl $\alpha g D / c_p$ bestimmt; er ist direkt proportional zur Schichtdicke. Das Verhältnis $(j_0 + j_D) / 2j_0$ ist 1, wenn alle Wärme von unten zugeführt wird, und 1/2, wenn alle Wärme durch innere Wärmequellen innerhalb der Schicht freigesetzt wird. Innere Wärmequellen sind also für geodynamische Prozesse weniger effektiv als Wärmezufuhr von unten. Die dritte dimensionslose Zahl, die den Wirkungsgrad mitbestimmt, ist das Verhältnis des Wärmeflusses, der unter statischen Bedingungen durch Wärmeleitung transportiert würde, zum tatsächlich beobachteten Wärmefluß. Der Kehrwert dieses Verhältnisses, die Zahl

$$N = \frac{j_0}{\lambda \frac{T_D - T_0}{D}},$$

ist die sogenannte Nusselt-Zahl. Sie ist ein Maß für die Effektivität der Konvektion als Mechanismus des Wärmetransports. Auf Seite 31 waren wir zu dem Ergebnis gekommen, daß im ozeanischen Bereich unter statischen Verhältnissen der Wärmefluß nur etwa ein Drittel des tatsächlich gemessenen Wärmeflusses sein könnte. Die Nusselt-Zahl ist also etwa gleich 3 zu setzen.

Wenn wir das Pyrolit-Modell zugrundelegen, ist die Wärmeproduktion im oberen Mantel derart (vgl. Seite 21), daß eine 1500 km dicke Schicht ausreichen würde, um den gesamten Erdwärmefluß zu decken. Ist D die Dicke der konvektierenden Schicht, so folgt $j_D = (1 - D/1500 \text{ km}) j_0$ und weiterhin

$$(j_0 + j_D) / 2j_0 = 1 - D/3000 \text{ km}.$$

Für den Wirkungsgrad thermischer Konvektion im oberen Mantel erhalten wir daher nach Gleichung (29):

$$W \approx \frac{\alpha g D}{c_p} (1 - D/3000 \text{ km} - 1/3) = \frac{\alpha g D}{c_p} (2/3 - D/3000 \text{ km}) \quad (29a)$$

Mit $g \approx 10^3 \text{ cm/sec}^2$ und $\alpha/c_p \approx 10^{-4} \text{ g/cal}$ nach BIRCH (1952, vgl. Abb. 5, folgt weiterhin

$$W \approx \frac{D}{4200 \text{ km}} (2/3 - \frac{D}{3000 \text{ km}}) \quad (29b)$$

Die Gleichungen (29), (29a) und (29b) sind selbstverständlich nur Näherungen für den Wirkungsgrad, da bei der Herleitung die dissipierte und die Auftriebs-Energie in Gleichung (25) vernachlässigt wurden. Dies ist nur dann gerechtfertigt, wenn diese Terme klein gegenüber dem Wärmefluß j_0 sind, d.h. aber gerade, wenn der Wirkungsgrad klein (gegen 1) ist. Die Formeln (29, a, b) sind also nur dann anwendbar, wenn $D \ll c_p/\alpha g \approx \approx 4200 \text{ km}$ ist.

Daneben ist zu berücksichtigen, daß durch Gleichung (29) zunächst nur der Wirkungsgrad in homogenen Medien beschrieben wird. Die Berücksichtigung von Phasenumwandlungen wird später eine Modifizierung von Gleichung (29) erforderlich machen. Von diesen Einschränkungen abgesehen, besteht ein großer Vorteil darin, daß Gleichung (29) unabhängig von der Rheologie des Mediums gilt; bei der Herleitung brauchten keine Annahmen über die spezielle Form der Dissipationsfunktion ϕ gemacht zu werden.

Wir wenden uns einer konkreten Nutzenanwendung zu: Beträchtliche Meinungsverschiedenheiten bestehen zur Zeit noch bezüglich der Tiefenerstreckung der Konvektionsströme im Erdmantel (vgl. OXBURGH, 1971). RUNCORN (1969) hält an der insbesondere von VENING-MEINESZ (1958, 1962) entwickelten Vorstellung fest, daß sich die Konvektionsströme über die ganze Tiefe des Erdmantels erstrecken und glaubt, Änderungen der

Geometrie der Konvektionsströme mit dem Wachsen des Erdkerns in Verbindung bringen zu können. Andere Autoren (LLIBOUTRY, 1969; JACOBY, 1970, 1973) wollen die zur Kompensation der Bewegung der Lithosphäre erforderliche Gegenströmung weitgehend auf die Asthenosphäre, d.h. etwa auf die oberen 200 bis 300 km beschränkt sehen. Nach Abschätzungen von JACOBY (1970) müßte der Wirkungsgrad etwa 1/10 betragen, wenn Konvektion in den oberen 300 km des Erdmantels ein geeigneter Antriebs-Mechanismus für die geotektonischen Vorgänge sein soll. Der Vergleich mit Gleichung (29) zeigt nun allerdings, daß in den oberen 300 km nur ein Wirkungsgrad von 0,04 erreicht werden kann. Wir müssen also annehmen, daß die Konvektion nicht auf die Lithosphäre und Asthenosphäre beschränkt ist, sondern in grössere Tiefen hinabreicht.

Allerdings macht dieser Zahlenvergleich auch deutlich, daß keine sehr viel größeren Tiefen benötigt werden. Konvektion im gesamten Erdmantel ist daher ebenfalls unwahrscheinlich. Die vermutliche Tiefenerstreckung der Konvektionsströme kann wie folgt grob abgeschätzt werden:

Wegen der großen horizontalen Ausdehnung einheitlich bewegter Platten kann für Abschätzungen der Energiedissipation ein einfacher Ansatz für die Strömungsgeschwindigkeit gemacht werden. Wir berücksichtigen nur die Horizontal-Komponente und nehmen an, daß diese gemäß

$$u = u_0 \cos \pi \frac{z}{D}$$

zwischen der Erdoberfläche und der Tiefe D variiert. Durch diesen Ansatz wird die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Die implizit enthaltene Voraussetzung einer scherspannungs-freien Begrenzung in der Tiefe D und die Vernachlässigung anderer Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit gibt der Abschätzung der Energiedissipation den Charakter einer Minimal-Abschätzung.

Man erhält:

$$\int_0^D \phi \, dz = \int_0^D \eta \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 \eta u_0^2}{2D} \approx 5 \frac{\eta u_0^2}{D}$$

Als mittlere Geschwindigkeit kann $u_0 \approx 3 \text{ cm/Jahr} \approx 10^{-7} \text{ cm/sec}$ angesetzt werden. Die Wahl eines sinnvollen Mittelwertes für die Viskosität ist angesichts der starken Variation im Erdmantel problematisch. Eine arithmetische Mittelung der in Abbildung 6 dargestellten Funktion würde zu einer unzulässigen Überbewichtung der großen Werte führen. Wir würden es vorziehen, denjenigen Wert zu verwenden, der, ausgehend vom Modell eines Mantels mit konstanter Viskosität, die nacheiszeitlichen Hebungs Vorgänge am besten erklärt. Leider herrscht hierüber keine Einigkeit. O'CONNELL (1971) gibt $6 \cdot 10^{21}$ poises und WALCOTT (1973) $3 \cdot 10^{22}$ poises an. Wir werden willkürlich 10^{22} poises verwenden. Zur Ermittlung der gesamten Energie, die pro Jahr umgesetzt wird, ist der obige Ausdruck mit der Oberfläche der Erde zu multiplizieren und durch die Energie der Erdbeben und die Hebungs-Energie (zusammen etwa 10^{25} erg/Jahr) zu ergänzen. Durch Division durch den Wärmefluß erhält man den Wirkungsgrad, der in Verbindung mit Gleichung (29a) die folgende Bestimmungs-Gleichung für die Tiefe D liefert.

$$\frac{5 \cdot \frac{\pi u_0^2}{D} 4\pi R^2 + E_{\text{seis}} + E_{\text{pot}}}{j_0 \cdot 4\pi R^2} \approx \frac{D}{4200 \text{ km}} \left(\frac{2}{3} - \frac{D}{3000 \text{ km}} \right)$$

Mit den bereits angegebenen Zahlenwerten und $R = 6370 \text{ km}$ ergibt sich

$$10^6 \text{ km}^2 = D^2 \left(2 - \frac{D}{1000 \text{ km}} \right) - (12,5 \text{ km}) D$$

mit der Lösung $D = 1013 \text{ km}$.

Die Tiefe von 1013 km als solche ist nicht sehr ernst zu nehmen, da die zugrunde liegende Gleichung (29) bzw. (29b) nur für homogene Medien gilt, wir aber in etwa 400 km bzw. 650 km Tiefe mit Phasenumwandlungen zu rechnen haben (vgl. Abschnitt 2.2.). Das Wichtigste am obigen Ergebnis besteht darin, daß die Eindringtiefe offensichtlich deutlich größer

als 400 km ist, daß also die Konvektionsströme zumindest die Olivin-Spinell-Phasengrenze durchdringen müssen. Auf die hiermit verbundene Änderung des Wirkungsgrades werden wir noch zurückkommen.

Im nächsten Abschnitt wenden wir uns zunächst der Lösung des Gleichungssystems (21) bis (23) für homogene Medien zu.

5. Konvektion endlicher Amplitude in homogenen Medien

Die Lösung des Gleichungssystems (21) bis (23) wird vor allem durch die nicht-linearen Glieder in Gleichung (23) erschwert. Da die dynamischen Eigenschaften der Konvektion gerade durch die nicht-linearen Glieder bestimmt werden, können diese nicht ohne wesentlichen Substanz-Verlust vernachlässigt oder linearisiert werden. Nach einer Linearisierung enthält das Gleichungssystem zwar noch Information darüber, unter welchen Bedingungen Konvektion eintritt, aber keine mehr über die Amplitude der Konvektion. Aufgrund der linearisierten Gleichungen hat RAYLEIGH (1916) das nach ihm benannte, bereits zitierte Stabilitätskriterium abgeleitet.

Das nicht-lineare Stabilitätsproblem war und ist Gegenstand umfangreicher Untersuchungen. Auf analytischem Wege wurde es unter anderen von MALKUS und VERONIS (1958), SCHLÜTER et al. (1965) und PLATZMAN (1965) behandelt. Numerische Modellrechnungen wurden neuerdings von MOORE und WEISS (1973), YOUNG (1974) und - speziell unter geophysikalischen Aspekten - von RICHTER (1973), McKENZIE et al. (1974) und DE BREMAECKER (1974) durchgeführt. Alle diese Untersuchungen wurden auf der Grundlage der Boussinesque-Approximation und unter der Annahme konstanter Material-Parameter durchgeführt. Einige andere Arbeiten (TURCOTTE und OXBURGH, 1969; TORRANCE und TURCOTTE, 1971; RICE, 1972; TURCOTTE et al., 1974) stehen im Zeichen der Bemühungen, über diese wenig realistischen Annahmen hinwegzukommen.

Im folgenden entwickeln wir eine einfache, analytische Näherungslösung, die die Amplitude thermischer Konvektion für Rayleigh-Zahlen nicht zu weit oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl beschreibt. Wir gehen dabei von den Gleichungen (21) bis (23), also von etwas allgemeineren Voraussetzungen aus, als im Rahmen der üblichen Boussinesq-Approximation gemacht werden. Im Vergleich mit der sehr formalen und langwierigen Entwicklung der Theorie durch MALKUS und VERONIS (1958) und andere dürfte ein wesentlicher Vorteil der folgenden Ableitung in ihrer leichteren physikalischen Verständlichkeit liegen. In diesem Interesse verzichten wir auch auf die sonst übliche Einführung dimensionsloser Variablen.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf zweidimensionale, stationäre Lösungen zwischen horizontalen, scherspannungsfreien Begrenzungen. Die Voraussetzung zweidimensionaler, stationärer Strömung ist in Einklang mit theoretischen Stabilitäts-Untersuchungen von SCHLÜTER et al. (1965) und BUSSE (1967) sowie experimentellen Beobachtungen für Rayleigh-Zahlen bis etwa 23000 von BUSSE und WHITEHEAD (1971). Darüberhinaus spricht die lineare Ausdehnung der geotektonischen Großstrukturen für weitgehend zweidimensionale Strömungen im Erdmantel. Die Annahme eines kartesischen Koordinatensystems und horizontaler Schichtgrenzen entspricht zwar nicht der natürlichen Situation, dürfte aber keine wesentliche Beeinträchtigung darstellen, da, wie zuvor gezeigt, die Eindringtiefe der Konvektionsströme von der Größenordnung 1000 km und somit klein gegenüber dem Krümmungsradius der Erde sein dürfte. Die Annahme scherspannungsfreier Begrenzungen ist für die Erdoberfläche zutreffend, für die untere Begrenzung aber vermutlich eine starke Idealisierung. Die Herdtiefen-Verteilung der Erdbeben könnte allerdings dafür sprechen - und wir werden später ein weiteres Argument hierfür kennenlernen - daß die untere Begrenzung der Konvektion im Mantel gerade durch die Phasen-Umwandlungs-Zone

in etwa 650 km Tiefe festgelegt ist. In diesem Fall bestünde in der unteren Grenze die Möglichkeit der Superplastizität (vgl. S. 27), was praktisch doch der Bedingung einer scherspannungsfreien Begrenzung nahe käme.

Die Erfahrung zeigt, daß die Geometrie der Konvektionsströme, mit welcher diese bei der kritischen Rayleigh-Zahl einsetzen, zunächst auch bei überkritischen Rayleigh-Zahlen erhalten bleibt. Dies legt nahe, für Konvektion endlicher Amplitude einen ähnlichen Ansatz zu verwenden, wie ihn RAYLEIGH (1916) erfolgreich für die Behandlung des linearen Stabilitätsproblems verwendet hat.

Die Horizontal-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit sei u , die Vertikal-Komponente sei w . Für die letztere machen wir den Ansatz

$$(30) \quad w = \rho_0 w_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D} ;$$

die Strömung sei also in horizontaler Richtung periodisch mit der Wellenlänge L . Im Gegensatz zu Abbildung 7 ist das Koordinaten-System um $L/4$ nach links verschoben; w wird in positiver z -Richtung, d.h. nach unten, positiv gezählt. Der obige Ansatz setzt voraus, daß die Vertikalkomponente w an der Oberfläche gleich Null ist, was für die Erdoberfläche nicht allgemein zutrifft. Da wir aber von den Effekten der Erosion absehen wollen, ist die Annahme $w(0)=0$ die logische Konsequenz der Stationarität. Ein allgemeinerer, mit den Randbedingungen verträglicher und mit L periodischer Ansatz wäre eine Fourier-Reihe der Form

$$w = \rho_0 \sum_{n,m} w_{nm} \sin 2\pi n \frac{x}{L} \sin \pi m \frac{z}{D} .$$

Der Ansatz (30) kann also als erstes Glied, als Grund-Mode, einer solchen Fourier-Entwicklung aufgefaßt werden. Wir versuchen im folgenden mit der Grund-Mode auszukommen, da erwartet

werden darf, daß sie energetisch den wichtigsten Beitrag liefert. Die höheren Moden dürften in stärkerem Maße von der weithin unbekannten Variation der Material-Parameter im Erdmantel abhängig sein, so daß auch aus diesem Grund die Beschränkung auf die Grund-Mode zunächst sinnvoll scheint.

Mit (30) folgt aus der Kontinuitätsgleichung (21) für die Horizontal-Komponente

$$\rho u = \rho_0 u_0 \frac{L}{2D} \cos 2\pi \frac{x}{L} \cos \pi \frac{z}{D} \quad (31)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \nu \left[\rho \frac{\partial u}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} \right] \approx \nu \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right] = \\ &= \nu \rho_0 w_0 \frac{2\pi}{L} \left[1 - \left(\frac{L}{2D} \right)^2 \right] \cos 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D} \end{aligned}$$

ist die Bedingung der Scherspannungs-Freiheit an der Oberfläche in guter Näherung erfüllt; die relative Änderung der Dichte ρ ist viel geringer als die relative Änderung der Geschwindigkeiten.

Die x-Komponente von Gleichung (22) lautet:

$$\sigma = - \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \rho_0 w_0 \frac{L}{2D} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \right] \cos 2\pi \frac{x}{L} \cos \pi \frac{z}{D}$$

Durch Integration erhält man die Druck-Variation:

$$\delta p = - \nu \rho_0 w_0 \frac{\pi}{D} \left[1 + \left(\frac{L}{2D} \right)^2 \right] \sin 2\pi \frac{x}{L} \cos \pi \frac{z}{D} \quad (32)$$

In die z-Komponente von Gleichung (22) eingesetzt, erhält man nach Integration die Temperatur-Variation:

$$(33) \quad \delta T = - \frac{\nu w_0 \pi^2}{\alpha g D^2} \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D} = \delta T_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D}$$

Für das häufiger wiederkehrende Verhältnis von zweifacher Schichtdicke zu Wellenlänge wurde hier die Abkürzung

$$n = \frac{2D}{L}$$

eingeführt. Neben diesem Verhältnis ist in den Gleichungen (31) bis (33) die Geschwindigkeit w_0 noch unbekannt. Die Bestimmung von w_0 muß aufgrund der Wärmeleitungsgleichung (23) erfolgen. Wir erreichen dieses Ziel in zwei Schritten:

Der erste Schritt besteht in der Integration der Gleichung (25), die wir auf Seite 48 durch eine erste Integration mit Hilfe des Gauss'schen Satzes aus Gleichung (23) erhalten hatten. Mit den Gleichungen (31) bis (33) und (11a) können die in Gleichung (25) erscheinenden Mittelwerte der nicht-linearen Terme als Funktionen der Tiefe z berechnet werden. Gleichung (25) wird dadurch zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die mittlere Temperatur $\bar{T}(z)$, deren Lösung keine Schwierigkeiten bereitet.

Als zweiten Schritt setzt man diese Lösung in die Wärmeleitungsgleichung in der Form (18a) ein und integriert diese bei festgehaltenem x über die Schichtmächtigkeit. Als Ergebnis erhält man die gesuchte Bedingung für w_0 und eine weitere für die Wellenlänge L .

Vorab geben wir einige Beziehungen an, die aus den Gleichungen (30) bis (33) durch einfache Umrechnung folgen und die wir später benötigen werden.

$$(34) \quad \oint \vec{v} \cdot \text{grad} \delta T = \frac{\pi \rho_0 w_0 \delta T_0}{2D} \sin 2\pi \frac{z}{D}$$

$$\rho w \delta T = \rho_0 w_0 \delta T_0 \sin^2 2\pi \frac{x}{L} \sin^2 \pi \frac{z}{D} \quad (35)$$

$$\overline{\rho w \delta T} = \frac{1}{2} \rho_0 w_0 \delta T_0 \sin^2 \pi \frac{z}{D} \quad (35a)$$

In der Dissipationsfunktion behandeln wir die Dichte näherungsweise als konstant; nach Gleichung (11a) folgt dann

$$\begin{aligned} \phi &= \nu \left\{ 2 \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right]^2 \right\} = \\ &= \nu \rho_0 w_0^2 \frac{\pi^2}{D^2} \left\{ 4 \left(\sin^2 2\pi \frac{x}{L} - \sin^2 \pi \frac{z}{D} \right) + \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \cos^2 2\pi \frac{x}{L} \sin^2 \pi \frac{z}{D} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

Aus (33), (35) und (36) folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \phi + \alpha \rho g w \delta T &= \nu \rho_0 w_0^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \left\{ 4 \left(\sin^2 2\pi \frac{x}{L} - \sin^2 \pi \frac{z}{D} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \cos^2 2\pi \frac{x}{L} \sin^2 \pi \frac{z}{D} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\overline{\phi + \alpha \rho g w \delta T} = 2 \nu \rho_0 w_0^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \cos^2 2\pi \frac{z}{D} \quad (37a)$$

$$\int_0^D (\phi + \alpha \rho g w \delta T) dz = \frac{\nu \rho_0 w_0^2 \pi^2}{2D} \frac{(1-n^2)^2}{n^2} \cos^2 2\pi \frac{x}{L} \quad (37b)$$

Durch Einsetzen von (35) und (37a) in (25) ergibt sich

$$\frac{c_p \rho_0 \omega_0 \delta T_0}{2} \sin 2\pi \frac{z}{D} - \lambda \frac{dT}{dz} + j_0 = hz + \frac{2\pi^2 \nu \rho_0 \omega_0^2}{D^2} \int_0^z \cos 2\pi \frac{z}{D} dz$$

$$= hz + \frac{\pi \rho_0 \omega_0^2 \nu}{D} \sin 2\pi \frac{z}{D}$$

oder auch

$$(25a) \quad \lambda \frac{dT}{dz} = j_0 - hz + \frac{c_p \rho_0 \omega_0 \delta T_0}{2} \sin 2\pi \frac{z}{D} - \frac{\pi \nu \rho_0 \omega_0^2}{D} \sin 2\pi \frac{z}{D}$$

Für $z=D$ folgt, wie zu fordern: $j_D = j_0 - hD$

Durch Integration von (25a) von 0 bis z erhält man die mittlere Temperatur $\bar{T}(z)$ als Funktion der Tiefe:

$$(38) \quad \lambda(\bar{T}(z) - T_0) = j_0 z - \frac{h z^2}{2} - \frac{c_p \rho_0 \omega_0 \delta T_0}{4} \left(z - \frac{D}{2\pi} \sin 2\pi \frac{z}{D} \right) +$$

$$+ \frac{\nu \rho_0 \omega_0^2}{2} \left(\cos 2\pi \frac{z}{D} - 1 \right)$$

Für $z=D$ wird hieraus

$$(38a) \quad \lambda(T_D - T_0) = j_0 D - \frac{hD^2}{2} + \frac{c_p \rho_0 \omega_0 \delta T_0}{4}$$

Hiermit kann man den Wärmefluß j_0 in (38) eliminieren und erhält mit der Abkürzung $\beta = (T_D - T_0)/D$ und $\alpha = \lambda/\rho_0 c_p$

$$\begin{aligned} \bar{T}(z) = T_0 + \beta z + \frac{h}{2\lambda}(D-z)z - \\ - \frac{w_0 \delta T_0 D}{8\pi\chi} \sin 2\pi \frac{z}{D} + \frac{\nu w_0^2}{2\chi G} (\cos 2\pi \frac{z}{D} - 1) \end{aligned} \quad (38b)$$

Die ersten drei Terme beschreiben den Temperaturverlauf bei stationärer Wärmeleitung ohne Konvektion. Die zwei Terme in der unteren Zeile beschreiben den Einfluß der Konvektion. Im Gegensatz zum mittleren Druck in der Tiefe z , der auch bei Konvektion praktisch mit dem hydrostatischen Druck übereinstimmt (vgl. S. 43), stimmt die mittlere Temperatur in der Tiefe z nicht mit der Temperatur im statischen Fall überein. Von den beiden hierfür maßgeblichen Termen in Gleichung (38b) ist der erste der wichtigere, da das Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{w_0 \delta T_0 D}{8\pi\chi} : \frac{\nu w_0^2}{2\chi G} &= \frac{\delta T_0 D c_p}{w_0 4\pi\nu} = \frac{\nu \pi^2 D c_p}{4\pi\nu\alpha g D^2} \cdot \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{c_p}{\alpha g D} \cdot \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \end{aligned}$$

wegen $c_p/\alpha g D \approx 4,2$ (vgl. S. 51 bis 53) und $n = \frac{2D}{L} \ll 1$ deutlich größer als 1 ist. Der erste Term beschreibt die Veränderung der mittleren Temperatur infolge des konvektiven Wärmetransports, der zweite dagegen die Veränderung durch Reibungswärme und Kompression bzw. Dilatation.

Durch Differentiation von Gleichung (38b) gelangt man zu:

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \beta + \frac{h}{2\lambda}(D-2z) - \frac{w_0 \delta T_0}{4\chi} \cos 2\pi \frac{z}{D} - \frac{\pi \nu w_0^2}{G \chi D} \sin 2\pi \frac{z}{D} \quad (39)$$

Als nächstes schreiben wir die Wärmeleitungsgleichung ausgehend von (18a) wie folgt um:

$$(40) \quad \begin{aligned} & \zeta \rho w \left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right] + \zeta \rho \vec{v} \operatorname{grad} \delta T = \\ & = \frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right) + \lambda \Delta \delta T + h + \phi + \alpha \rho g w \delta T \end{aligned}$$

Diese Gleichung sollte sich als Identität erweisen, wenn die verschiedenen Ausdrücke nach den Gleichungen (30) bis (34), (37) und (38) eingesetzt werden. Es zeigt sich, daß dies nicht streng an allen Punkten (x, z) der Fall ist. Tatsächlich war von vornherein nicht zu erwarten, daß mit dem Ansatz (30) eine strenge Lösung des nicht-linearen Stabilitätsproblems möglich sein würde. Wir wollen uns damit zufriedengeben, wenn es gelingt, die bisher noch unbestimmte Geschwindigkeit w_0 so zu bestimmen, daß Gleichung (40), wenn schon nicht lokal, so wenigstens an jeder x -Koordinate integriert von 0 bis D erfüllt wird. Wir fordern also:

$$\begin{aligned} \int_0^D \left\{ \zeta \rho w \left[\frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right] + \zeta \rho \vec{v} \operatorname{grad} \delta T \right\} dz &= j_0 - j_0 + hD + \\ &+ \int_0^D \left\{ \lambda \Delta \delta T + \phi + \alpha \rho g w \delta T \right\} dz \end{aligned}$$

Bei Einsetzen von (30), (33), (34) und (39) treten folgende Integrale auf:

$$\begin{aligned} \int_0^D \sin \pi \frac{z}{D} dz &= \frac{2D}{\pi} & \int_0^D \sin \pi \frac{z}{D} \cos 2\pi \frac{z}{D} dz &= -\frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \\ \int_0^D \sin 2\pi \frac{z}{D} dz &= 0 & \int_0^D (D-2z) \sin \pi \frac{z}{D} dz &= 0 \\ \int_0^D \sin 2\pi \frac{z}{D} \sin \pi \frac{z}{D} dz &= 0 \end{aligned}$$

Mit diesen Integralen, sowie mit (37b) und wegen $j_D - j_0 + hD = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon_p \rho_0 w_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \left\{ \left[\beta - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_f \right] \frac{2D}{\pi} + \frac{w_0 \delta T_0 D}{6\pi \chi} \right\} = - \frac{\lambda \delta T_0 \pi^2 (n^2 + 1) \sin 2\pi \frac{x}{L} \cdot \frac{2D}{\pi}}{D^2} \\ + \nu \rho_0 w_0^2 \frac{\pi^2}{2D} \frac{(1 - n^2)^2}{n^2} \cos 4\pi \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Setzt man nach (33)

$$\delta T_0 = - \frac{\nu w_0}{\alpha g} \left(\frac{\pi}{D} \right)^2 \frac{(1 + n^2)^2}{n^2}$$

und faßt die Glieder mit dem Faktor $\sin 2\pi \frac{x}{L}$ zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{2D}{\pi} \epsilon_p \rho_0 w_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \left\{ \beta - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_f - \frac{w_0^2 \nu \pi^2}{12 \chi \alpha g D^2} \frac{(1 + n^2)^2}{n^2} - \frac{\chi \nu \pi^4 (1 + n^2)^3}{\alpha g D^4} \frac{1}{n^2} \right\} = \\ = \nu \rho_0 w_0^2 \frac{\pi^2}{2D} \frac{(1 - n^2)^2}{n^2} \cos 4\pi \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Nach Umformung unter Berücksichtigung von $u_0 = w_0 L / 2D = w_0 / n$ (Gleichung 31) und mit der Abkürzung $\tau = \beta - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_f$ für den mittleren Überadiabatischen Temperaturgradienten erhält man:

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \frac{\chi \nu}{\alpha g \tau D^4} \cdot \frac{\pi^4 (1 + n^2)^3}{n^2} \left[\left(\frac{w_0 D}{2\pi \chi} \right)^2 \frac{1}{3(1 + n^2)} + 1 \right] \right\} \sin 2\pi \frac{x}{L} = \\ = \frac{\pi^3 \nu u_0}{4 n \epsilon_p \tau D^2} (1 - n^2)^2 \cos 4\pi \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (41)$$

Da die Funktionen $\sin 2\pi \frac{x}{L}$ und $\cos 4\pi \frac{x}{L}$ linear unabhängig sind, kann die Gleichung (41) nur erfüllt werden, wenn die Faktoren vor diesen Funktionen gleich Null sind. Die linke Seite liefert eine Bedingung für die Amplitude, die rechte für die Geometrie der Konvektionsströmung.

Allerdings sind die beiden Bedingungen unterschiedlich zu bewichten. Während die linke Seite der Gleichung (41) von der Größenordnung 1 ist, ist die rechte Seite von der Größenordnung

$$A = \frac{\pi^3 \nu u_0}{4 n c_p \tau D^2}$$

Mit $D \approx 10^8 \text{ cm}$, $\tau D \approx 1000^\circ \text{C}$, $c_p \approx 10^7 \text{ erg/g}^\circ \text{C}$, $\nu \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ cm}^2/\text{sec}$, $u_0 \approx 10^{-7} \text{ cm/sec}$ und $n=2D/L \approx 1/7$ ergibt sich:

$$A \approx \frac{1}{60}$$

Wir haben sozusagen die Amplituden-Bedingung, die sich aus der linken Seite von Gleichung (41) ergibt, 60mal ernster zu nehmen als die Geometrie-Bedingung $n^2=1$, die aus der rechten Seite folgt. Eine geringfügige Modifikation unseres Ansatzes (30) - etwa die Berücksichtigung höherer Moden -, wodurch die linke Seite von Gleichung (41) nur um $1/60$ geändert würde, könnte die Geometrie-Bedingung $n^2=1$ außer Kraft setzen, ohne daß deshalb die Amplituden-Bedingung merklich geändert werden müßte. Wir dürfen daher annehmen, daß die Amplituden-Bedingung auch für Konvektions-Rollen mit Wellenlängen $L \neq 2D$ eine zutreffende Beschreibung liefert.

Nach w_0 aufgelöst, erhalten wir aus der linken Seite von Gleichung (41)

(42)

$$w_0 = \frac{2\pi x}{D} \sqrt{3(1+n^2) \left(\frac{R}{R_c} - 1 \right)}$$

mit:

(43)

$$R = \frac{\alpha g \tau D^4}{\kappa \nu} ; \quad \tau = \frac{T_D - T_0}{D} - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_s$$

(44)

$$R_c = \pi^4 \frac{(1+n^2)^3}{n^2} ; \quad n = \frac{2D}{L}$$

Aus Gleichung (42) geht hervor, daß eine Konvektionsströmung nur möglich ist, wenn die Rayleigh-Zahl R größer als die kritische Rayleigh-Zahl R_c ist; andernfalls ist w_0 imaginär. Die kritische Rayleigh-Zahl ist nach Gleichung (44) von der Wellenlänge der Konvektionsströmung abhängig; ihr Wert wird allein durch das Verhältnis von Wellenlänge L zu Schichtmächtigkeit D bestimmt. In Abbildung 8 ist die kritische Rayleigh-Zahl R_c als Funktion dieses Verhältnisses dargestellt. Man sieht, daß R_c für eine bestimmte Wellenlänge

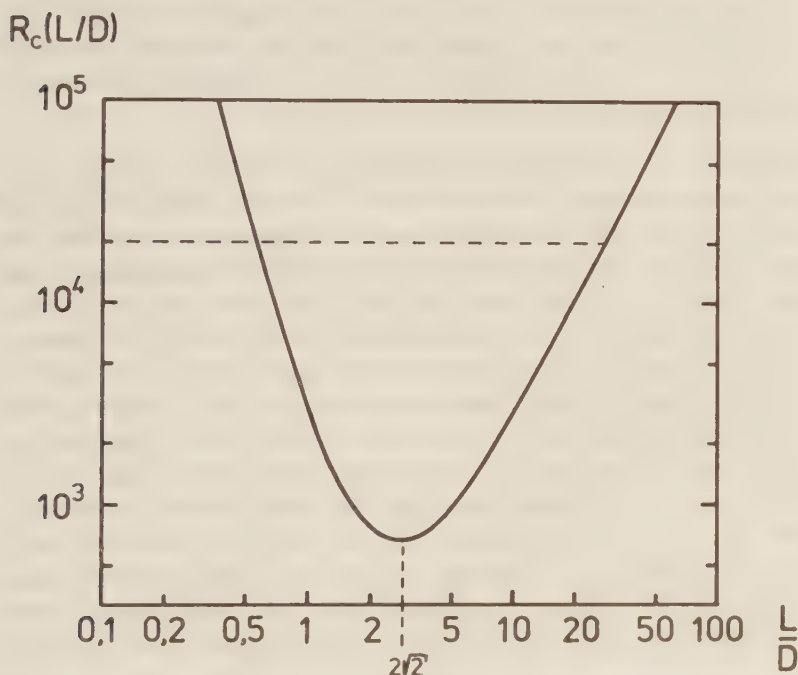


Abb. 8: Kritische Rayleigh-Zahl R_c bei scherspannungsfreien Begrenzungen als Funktion des Verhältnisses von horizontaler Wellenlänge L zur Schichtdicke D .

(es ist $L=2\cdot\sqrt{2}\cdot D$) ein Minimum hat; sein Wert ist $R_{c,min}=657,5$. Es ist daher zu erwarten, daß Konvektion bei einer kontinuierlichen Erhöhung der Temperaturdifferenz zwischen der unteren und der oberen Begrenzung mit der Wellenlänge $L=2\cdot\sqrt{2}\cdot D$ einsetzt, sobald die Rayleigh-Zahl den Wert 657,5 überschreitet. GOLDSTEIN und GRAHAM (1969) haben in der bisher einzigen experimentellen Untersuchung über Konvektion zwischen scherspannungsfreien horizontalen Begrenzungen diesen Wert im Rahmen der Meßgenauigkeit bestätigt. (Konvektion zwischen festen Grenzen ist experimentell einfacher zu realisieren und daher viel intensiver untersucht. Die Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Theorie, die ganz analog wie im Fall freier Grenzen entwickelt werden kann und auch zu qualitativ gleichartigen Ergebnissen führt.)

Wird der mittlere Überadiabatische Temperaturgradient, bzw. die Rayleigh-Zahl, weiter erhöht, so werden neben der primären Strömung mit der Wellenlänge $L=2\cdot\sqrt{2}\cdot D$ auch Strömungen mit anderer Wellenlänge möglich. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl wird das Spektrum der möglichen Wellenlängen immer breiter. Bei einer Rayleigh-Zahl von 20000 (gestrichelte Linie in Abbildung 8) sind im Prinzip Wellenlängen zwischen $L=0,56D$ und $L=28,4D$ möglich. Die Frage, welche dieser Wellenlängen sich tatsächlich einstellt, bzw. dominant wird, kann nicht allgemein beantwortet werden, wenngleich aufgrund der hier entwickelten Theorie aus Gleichung (41) eine gewisse Bevorzugung von Konvektions-Rollen mit $L=2D$, d.h. $n=1$, zu erkennen ist. Wir werden auf die Frage der Wellenlänge noch zurückzukommen haben, da die Eignung von Konvektion als Antriebsmechanismus für geodynamische Prozesse nicht zuletzt hiervon abhängt.

Der Nachweis, daß Konvektion erst oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl einsetzt und daß diese Zahl in der durch Gleichung (44) beschriebenen Form von der Wellenlänge abhängt, kann bereits durch die linearisierte Theorie erbracht werden (RAYLEIGH, 1916). Der entscheidende Mehrertrag der nicht-

linearen Theorie besteht in der Aussage über die Strömungsgeschwindigkeit bei gegebener überkritischer Rayleigh-Zahl (Gleichung 42). Im Rahmen der Boussinesq-Approximation ist dieser Zusammenhang bereits durch MALKUS und VERONIS (1958) abgeleitet worden. Durch die hier gegebene Ableitung ist darüber hinaus gezeigt, daß derselbe Zusammenhang für die Grund-Mode erhalten bleibt, wenn die Wärmezufuhr nicht ausschließlich von unten, sondern zum Teil oder ganz durch innere Quellen erfolgt, und wenn die Energiedissipation berücksichtigt wird. Die Kompressibilität kann näherungsweise berücksichtigt werden, indem in der Rayleigh-Zahl statt des mittleren Temperaturgradienten der mittlere überadiabatische Temperaturgradient eingesetzt wird. Dieses Ergebnis, welches JEFFREYS (1930) für das lineare Stabilitätsproblem erhalten hatte, gilt also auch für das nicht-lineare Problem.

Es überrascht zunächst, daß nach Gleichung (42) die Strömungsgeschwindigkeit w_0 bei gegebener Rayleigh-Zahl unabhängig davon ist, ob die Wärmezufuhr ausschließlich von unten oder teilweise durch innere Quellen erfolgt. Es könnte scheinen, als bestünde hierin ein Widerspruch zur Aussage, die wir über den Wirkungsgrad der Konvektion gemacht hatten (Gleichung 29). Auf Seite 50 hatten wir gefunden, daß Wärmeproduktion durch innere Quellen dynamisch nur halb so effektiv ist wie Wärmezufuhr von unten. Die Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs besteht darin, daß aufgrund der Wärmeleitungsgleichung bei gleichem Wärmefluß an der Oberfläche der mittlere Temperaturgradient bis zur Tiefe D , und damit auch die Rayleigh-Zahl, ohne innere Quellen doppelt so groß ist, als wenn alle Wärme durch innere Quellen produziert wird.

Zur Vervollständigung der Lösung fügen wir im folgenden die Beziehungen an, die sich ergeben, wenn das Ergebnis (42) in die Gleichungen (31), (32), (33) und (38b) eingesetzt wird.

Man erhält folgende Amplituden für die Horizontal-Komponente der Geschwindigkeit, die Druck-Variation und die Temperatur-Variation:

$$(45) \quad u_0 = \frac{2\pi x}{nD} \sqrt{3(1+n^2)\left(\frac{R}{R_c} - 1\right)}$$

$$(46) \quad \delta p_0 = - \frac{2\nu \rho_0 x}{nD^2} \sqrt{3(R - R_c)}$$

$$(47) \quad \delta T_0 = - \frac{2\pi(1+n^2)}{n} \frac{\tau D}{R} \sqrt{3(R - R_c)}$$

Für die mittlere Temperatur in der Tiefe z ergibt sich:

$$(48) \quad \bar{T}(z) = T_0 + \beta z + \frac{h}{2\lambda}(D-z)z + \frac{3\tau D}{2\pi} \left(1 - \frac{R_c}{R}\right) \sin 2\pi \frac{z}{D}$$

Den in Gleichung (38b) noch enthaltenen Term mit dem Faktor $(\cos 2\pi z/D - 1)$, den wir auf Seite 61 als unbedeutend erkannt hatten, haben wir hier weggelassen. In Abbildung 9 ist die mittlere Temperatur nach Gleichung (48) mit R/R_c als Parameter dargestellt. In Abbildung 9a ist $h = 0$, in 9b ist $h = 10^{-14}$ cal/cm³sec (Pyrolit-Modell). Die übrigen Parameter wurden bei beiden Abbildungen wie folgt gewählt: $D = 700$ km, $\beta = 2,5$ °C/km, $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-2}$ cal/cm sec °C, $(dT/Dz)_s = 0,5$ °C/km. Der Parameter $R/R_c = 1$ entspricht dem Fall reiner Wärmeleitung. Besonders auffällig ist; daß für Rayleigh-Zahlen größer als etwa $1,5 \cdot R_c$ die mittlere Temperatur mit der Tiefe nicht mehr monoton zunimmt, sondern im mittleren Teil der Schicht abnimmt. Eine derartige Temperatur-Inversion wird auch durch eine strengere, von VERONIS (1966) entwickelte Theorie vorhergesagt. Kürzlich konnte dieser Effekt von FARADIEH und TANKIN (1974) durch interferometrische Temperaturmessung experimentell direkt nachgewiesen werden. Allerdings zeigte sich hierbei in Überein-

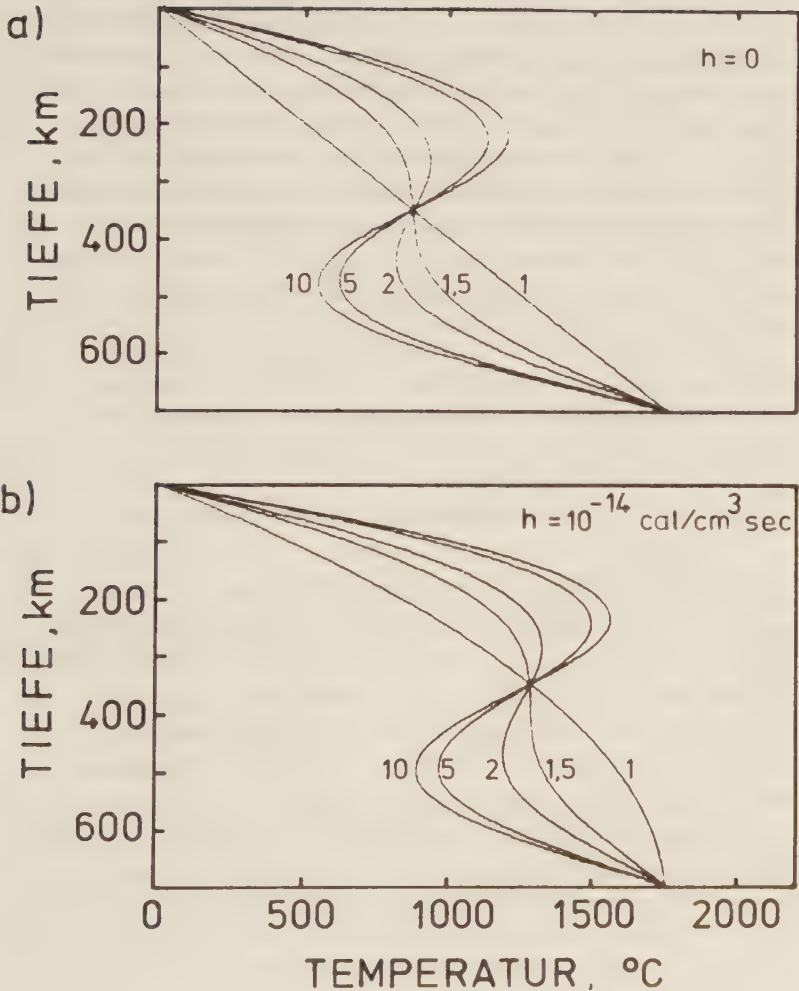


Abb. 9: Horizontal gemittelte Temperatur $T(z)$ als Funktion der Tiefe nach Gleichung (48): a) ohne innere Wärmequellen, b) mit $h=10^{-14} \text{ cal/cm}^3 \text{ sec}$. Der Parameter ist das Verhältnis der Rayleigh-Zahl zur kritischen Rayleigh-Zahl R/R_c ; die Wärmeleitfähigkeit ist konstant ($\lambda = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cal/cm sec}^\circ\text{C}$) angenommen. Die Temperatur-Inversion in der unteren Hälfte der Schicht fällt vermutlich wegen der alleinigen Berücksichtigung der Grund-Mode zu groß aus.

stimmung mit den numerischen Untersuchungen von VERONIS (1966), daß die Temperatur-Inversion erst für Rayleigh-Zahlen $R \geq 3,8 \cdot R_c$ auftritt, und daß die Temperatur-Abnahme bei Rayleigh-Zahlen $R \approx 10 \cdot R_c$ nur etwa 6 % der gesamten Temperaturdifferenz innerhalb der Schicht beträgt. Offensichtlich ergibt sich also nach Gleichung (48) eine zu starke Temperatur-Inversion. Die Ursache hierfür dürfte in der alleinigen Berücksichtigung der Grund-Mode zu sehen sein. Darüber hinaus verbietet insbesondere die Annahme einer konstanten Wärmeleitfähigkeit eine direkte Übertragung der in Abbildung 9 dargestellten Ergebnisse auf den Erdmantel.

Die Differentiation der Gleichung (48) liefert mit $z=0$ eine Bedingung für den mittleren Wärmefluß an der Oberfläche:

$$(49) \quad j_0 = \lambda \beta + \frac{hD}{2} + 3\lambda\tau \left(1 - \frac{R_c}{R}\right)$$

Mit den zuvor verwendeten Werten für λ , β , h , τ und D ergibt sich Übereinstimmung mit dem an der Erdoberfläche beobachteten Wärmefluß von $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$, wenn $R/R_c = 7$ ist. Mit $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$, $g = 10^3 \text{ cm/sec}^2$, $\rho c_p = 1 \text{ cal/cm}^3$ und $\gamma = 10^{22} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ist andererseits auch über die Rayleigh-Zahl R verfügt; man erhält $R = 64000$ und wegen der Bedingung $R/R_c \approx 7$ folglich $R_c \approx 9000$. Der Abbildung 8 entnimmt man, daß zu einer kritischen Rayleigh-Zahl von 9000 etwa ein Verhältnis von Wellenlänge zu Schichtdicke $L/D \approx 20$ gehört. Nur wenn die Konvektions-Rollen stark abgeplattet sind, wenn der horizontale Durchmesser einer Rolle ($L/2$) etwa das Zehnfache der Schichtdicke beträgt, können wir Übereinstimmung mit dem beobachteten Wärmefluß erreichen.

Indirekt wird diese Schlußfolgerung durch die Ergebnisse der numerischen Modell-Rechnungen von MCKENZIE et al. (1973) be-

stättigt. Aus rechentechnischen Gründen mußten diese Modellrechnungen auf Konvektions-Rollen mit einem Verhältnis $L/D \leq 4$ beschränkt werden. Diese Restriktion führte bei Einhaltung des beobachteten Wärmeflusses auf unrealistisch niedrige Temperaturen im Erdmantel. Zwischen 100 km und 600 km Tiefe ergaben sich bei allen Modellen Temperaturen unter 400°C . Die Ursache hierfür kann nur in der Festlegung der Zell-Durchmesser liegen, da die übrigen von McKENZIE et al. verwendeten Parameter kaum von den oben benutzten abweichen.

Mit $L/D \approx 20$ und $D = 700$ km wäre zu erwarten, daß die Zonen aufsteigender und absteigender Konvektion etwa 7000 km voneinander entfernt liegen sollten. Dies paßt nicht schlecht zu den beobachteten Abständen der Zonen des "sea floor spreading" und der Subduktions-Zonen und soll uns zunächst Grund genug sein, uns über die theoretischen Schwierigkeiten, die sich aus der Annahme großer L/D -Verhältnisse ergeben - aus Gleichung (41) ergab sich $n=2D/L=1$ -, hinwegzusetzen. Mit $n=1/10$ und unter Beibehaltung der obigen Werte für die übrigen Parameter folgt aus den Gleichungen (45), (46) und (47):

$$\begin{aligned} u_o &= 1,8 \text{ cm/Jahr} \\ \oint p_o &= - 940 \text{ bar} \\ \oint T_o &= - 560^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Diese Werte sind größenordnungsmäßig plausibel; während die Horizontal-Geschwindigkeit u_o verglichen mit den Ergebnissen der "Platten-Tektonik" etwas zu klein ist, scheint die Amplitude der Temperatur-Variation $\oint T_o$ eher zu groß ausgefallen.

Die Temperatur als Funktion von x und z erhält man durch Addition der horizontal gemittelten Temperatur $\bar{T}(z)$ nach Gleichung (48) und der Temperatur-Variation $\oint T(x,z)$ nach den Gleichungen (33) und (47). In Abbildung 10 sind die

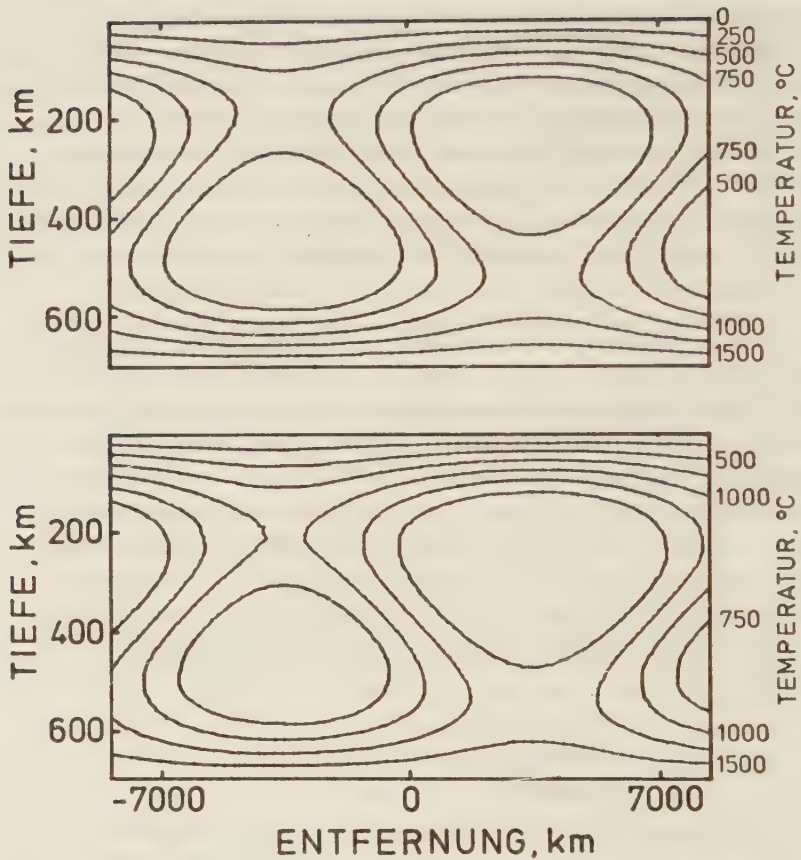


Abb. 10: Isothermen bei stationärer Konvektion in Form von abgeflachten Rollen, die senkrecht zur Zeichenebene orientiert sind; man beachte die Überhöhung. Die zugehörigen Parameter sind: $R=64\ 000$, $\eta=0,1$, $\beta=2,5\ ^\circ\text{C}/\text{km}$, $\tau=2,0\ ^\circ\text{C}/\text{km}$, $D=700\ \text{km}$ und a) $h=0\ \text{cal}/\text{cm}^3\text{sec}$ bzw. b) $h=10^{-14}\ \text{cal}/\text{cm}^3\text{sec}$. Der mittlere Wärmefluß an der Oberfläche ist im Fall a) gleich 1,15 und im Fall b) gleich 1,5 Wärmefluß-Einheiten.

hiernach errechneten Isothermen für $R=64000$ und $L/D=20$, bzw. $R_c=9000$, dargestellt; im Übrigen sind die gleichen Parameter-Werte wie für Abbildung 9 verwendet worden (Angaben auf Seite 68). Für Abbildung 10a wurde $h=0$, d.h. keine innere Wärmequelle, angenommen; der mittlere Wärmefluß an der Oberfläche beträgt hier nur $1,15 \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$. Die Isothermen in Abbildung 10b wurden analog wie die mittlere Temperatur in Abbildung 9b mit einer Wärmeproduktion entsprechend einer pyrolitischen Zusammensetzung berechnet; der zugehörige Wärmefluß an der Oberfläche ist gleich dem gemessenen Erdwärmefluß. Man beachte die starke Überhöhung der Abbildung 10.

Im Verlauf der Isothermen spiegelt sich deutlich die Geometrie der zugehörigen Strömung wieder. Im Bereich des aufsteigenden Konvektionsstromes sind sie nach oben, im Bereich absteigender Konvektion nach unten gewölbt. Zugleich offenbart sich im Verlauf der Isothermen eine gewisse Unzulänglichkeit der zugrunde liegenden vereinfachten Lösung für Rayleigh-Zahlen der hier diskutierten Größenordnung: Streng genommen dürfte es in den Zonen des Auf- und Abstroms - zumindest im Fall fehlender Quellen - keine geschlossenen Isothermen geben, da sich beispielsweise das Material in der Zone des Aufstiegs von unten nach oben kontinuierlich abkühlen muß. Die geschlossenen Isothermen in Abbildung 10 und die zu starke Temperatur-Inversion in Abbildung 9 hängen innerlich zusammen und sind gemeinsam durch die Beschränkung auf die Grund-Mode im Ansatz (30) bedingt. Diese Unzulänglichkeiten stehen einer weiteren Anwendung der gefundenen Näherungslösung nicht prinzipiell entgegen. Es sei daran erinnert, daß wir bei der Herleitung im Interesse einer korrekten pauschalen Energie-Bilanz bewußt auf eine lokale Erfüllung der Wärmeleitungsgleichung verzichtet haben (vgl. Seite 62). Wir dürfen daher erwarten, daß unsere Näherungslösung insbesondere die pauschalen energetischen Aspekte der Konvektion besser beschreibt als lokale Eigenschaften des

Temperatur- oder Geschwindigkeits-Feldes.

Die Lösungen (42) bis (48) basieren unter anderem auf den Navier-Stokes-Gleichungen in der Form (22); dort war vorausgesetzt worden, daß in der Dichte-Variation $\delta\rho = \rho_0(\delta p/k_T - \alpha\delta T)$ im Auftriebs-Term $\delta\rho\vec{g}$ der durch die Druck-Variation bedingte Anteil vernachlässigt werden kann. Diese Annahme ist dann berechtigt, wenn

$$\frac{\delta p}{\alpha k_T \delta T} \ll 1$$

ist. Die Berechtigung ist anhand der Lösungen (46) und (47) für die Amplituden der Druck- und Temperatur-Variation zu überprüfen. Man erhält:

$$\frac{\delta p_0}{\alpha k_T \delta T_0} = \frac{\kappa \nu \rho_0 R}{\pi(1+n^2)\alpha k_T \tau D^3} = \frac{\rho_0 g D}{\pi(1+n^2)k_T}$$

Die Vernachlässigung der druck-bedingten Dichte-Variation im Auftriebs-Term ist also zulässig, wenn der Kompressionsmodul deutlich größer als der hydrostatische Druck an der Basis der Schicht ist. Im Erdmantel ist diese Voraussetzung durchweg erfüllt. Nach BULLEN (1963) beträgt beispielsweise der Druck in 700 km Tiefe etwa $0,26 \cdot 10^6$ bar und der Mittelwert des Kompressionsmoduls bis in diese Tiefe etwa $2 \cdot 10^6$ bar; der obige Ausdruck wird hiermit etwa 0,04 und daher hinreichend klein.

Aus den Lösungen (42) bis (48) können noch einige weitere geodynamisch interessante Aspekte abgeleitet werden: Nach den Gleichungen (32) und (46) ist die Druck-Variation für $z=0$ gleich

$$\delta p(x,0) = - \frac{2\nu\kappa\rho_0}{\pi D^2} \sqrt{3(R-R_c)} \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

Hieraus muß geschlossen werden, daß die Oberfläche nicht mit der Fläche $z=0$ identisch sein kann. Es sei $H(x)$ die Höhe der

freien Oberfläche über $z=0$; sie ist festgelegt durch die Bedingung:

$$\delta p(x,0) = \rho_0 g H(x)$$

bzw.

$$H(x) = - \frac{2 \nu x}{n g D^2} \sqrt{3(R-R_c)} \sin 2\pi \frac{x}{L} \quad (50)$$

Die Oberfläche oszilliert also mit der Wellenlänge L und der Amplitude $H_0 = \pm (2 \nu x / n g D^2) \sqrt{3(R-R_c)}$ um das mittlere Niveau $z=0$. Die Oberfläche ist angehoben, wo die Vertikal-Komponente der Strömung negativ, d.h. nach oben gerichtet ist, und abgesenkt, wo die Strömung nach unten gerichtet ist. Mit denselben Zahlenwerten, die Übereinstimmung mit dem beobachteten Erdwärmefluß ergeben hatten und die der Abbildung 10b zugrunde liegen, erhält man

$$H_0 = \pm 3 \text{ km} .$$

Auch mit diesem Wert darf man zufrieden sein, da die Niveau-Unterschiede zwischen der mittleren Tiefe der Meeresböden und den mittelozeanischen Rücken einerseits bzw. den Tiefsee-Gräben andererseits tatsächlich von dieser Größenordnung sind. Im einzelnen freilich wird man das Relief der Ozeanböden senkrecht zum Streichen der Groß-Strukturen nicht als sinus-förmig bezeichnen können. Es darf aber aufgrund des jetzigen Ergebnisses erwartet werden, daß auch eine im Detail bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erzielt werden kann, wenn bei der theoretischen Behandlung die Variation der effektiven Viskosität sowie höhere Moden in der Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung berücksichtigt werden.

Im Zusammenhang mit dem Relief der Oberfläche ist die Frage nach der Isostasie von Interesse. Das Prinzip der Isostasie besagt bekanntlich in seiner üblichen Formulierung, daß es im Erdinnern eine konstante Tiefe Z gibt, oberhalb welcher

jede vertikale Säule von gleichem, hinreichend großem Querschnitt gleiche Masse enthält. (Obwohl diese Definition physikalisch nicht voll befriedigend ist, wird in der praktischen Anwendung doch meist hiernach verfahren.) Die Gültigkeit des Isostasie-Prinzips wird häufig stillschweigend, bisweilen auch axiomatisch vorausgesetzt. Inwiefern dies in einem dynamischen System berechtigt ist, kann am Beispiel unserer Lösungen für die Temperatur-Variation (Gleichungen 33 und 47) und für die Topographie (Gleichung 50) getestet werden. Wir fragen also: gibt es eine Tiefe Z , oberhalb welcher die Masse in jeder vertikalen Säule von konstantem Querschnitt konstant ist? Ist die Tiefe eventuell gleich der Tiefe D , bis in welche die Konvektion hinabreicht?

Zur Beantwortung dieser Fragen integrieren wir die Dichte von der Oberfläche bis in die Tiefe Z ; zur Illustration der Integration kann die Skizze in Abbildung 11 dienen. Wenn Z die ge-

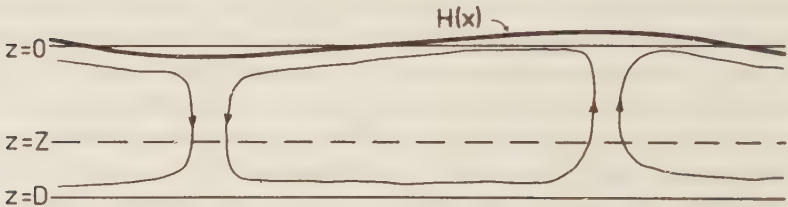


Abb. 11: Zur Illustration des Isostasie-Problems bei Konvektion.

suchte Ausgleichs-Tiefe ist, muß gelten:

$$\int_{-H(x)}^Z \rho(x, z) dz = \int_0^Z \bar{\rho}(z) dz$$

Wenn das linke Integral in ein Integral von 0 bis Z und ein solches von $-H(x)$ bis 0 aufgespaltert wird und im letzteren die Dichte näherungsweise gleich ρ_0 gesetzt wird, folgt:

$$\rho_0 H(x) + \int_0^Z [\rho(x, z) - \bar{\rho}(z)] = 0$$

Mit $\rho(x, z) - \bar{\rho}(z) = -\alpha \delta T(x, z) = -\alpha \delta T_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D}$

erhält man die Bedingung:

$$\rho_0 H(x) - \frac{\alpha \delta T_0 D}{\pi} \left(1 - \cos \pi \frac{z}{D}\right) \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

bzw. nach Elimination von δT_0 mittels (47) und (50):

$$\rho_0 H(x) - \rho_0 H(x) (1+n^2) \left(1 - \cos \pi \frac{z}{D}\right) = 0 \quad (51)$$

Z ist also eine isostatische Ausgleichsfläche, sofern

$$\cos \pi \frac{z}{D} = 1 - \frac{1}{1+n^2}$$

gilt. Wenn, wie im Erdmantel, $n^2 \ll 1$ ist, folgt $Z = D/2$, d.h. die Massen der Topographie werden gerade durch das Massendefizit bis zur Tiefe $D/2$ kompensiert. Das gesamte Massendefizit im Konvektionsstrom ist doppelt so groß; es wird durch den zweiten Term in Gleichung (51) beschrieben, wenn $Z = D$ gesetzt wird. Insgesamt kompensiert also die Topographie das Massendefizit im Konvektionsstrom nur zur Hälfte.

Wenngleich dieses Ergebnis wegen den vereinfachenden Annahmen in der Theorie nicht unbedingt quantitativ auf den Erdmantel übertragen werden kann, verdeutlicht es doch, welche prinzipiellen Schwierigkeiten auftreten, wenn der Begriff der Isostasie auf ein dynamisches System angewendet wird. Die Tiefe $Z = D/2$ ist zwar eine Ausgleichstiefe im Sinne der Definition, daß in jeder Säule oberhalb Z die gleiche Masse enthalten ist; zugleich ist es eine Fläche konstanten Drucks, wie aus Gleichung (32) abzulesen ist; es ist aber keine Fläche, oberhalb welcher alle Störmassen liegen, und es ist keine Fläche, unterhalb welcher hydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Wenn alle diese unterschiedlichen Eigenschaften

- was häufig wie selbstverständlich geschieht - ein und derselben "isostatischen Ausgleichsfläche" zugeschrieben werden, erweist sich der Begriff der Isostasie vor allem als Quelle für Mißverständnisse. Würden wir beispielsweise die Ausgleichstiefe, im Gegensatz zur oben verwendeten Definition, als diejenige Tiefe definieren, oberhalb welcher alle Störmassen liegen, so wäre dies in unserem dynamischen Beispiel nicht die Tiefe $D/2$, sondern die Tiefe D ; die Masse der Säulen oberhalb D ist dann allerdings nicht konstant und auch der Druck in der Tiefe D ist nicht konstant.

Wir haben gesehen, daß durch die Konvektionstheorie in der hier entwickelten Form, trotz der zugrunde liegenden starken Vereinfachungen, eine Reihe meßbarer Phänomene, zu denen der Erdwärmestrom, die Ausdehnung und die Geschwindigkeit der Lithosphären-Platten und die Niveau-Unterschiede auf den Meeresböden gehören, zumindest größenordnungsmäßig richtig beschrieben werden. Zum Schluß dieses Abschnitts soll geprüft werden, ob auch die Folgerungen, die sich aus der Theorie in Bezug auf die deviatorischen Spannungen ergeben, mit unseren diesbezüglichen Kenntnissen über den Erdmantel verträglich sind.

Informationen über den Spannungszustand im Erdinnern kann man bekanntlich durch Untersuchungen des Herdmechanismus von Erdbeben erhalten. Im Hinblick auf den Antriebsmechanismus sind vor allem die Herdmechanismen von Tiefen-Beben von Interesse. Die Abbildung 12 gibt eine Zusammenstellung diesbezüglicher Ergebnisse für verschiedene Subduktionszonen nach ISACKS und MOLNAR (1969) wieder. Offene Kreise symbolisieren Kompression, geschlossene Kreise Dilatation in Richtung des Einfallens der Subduktionszonen; Kreuze bezeichnen herdmechanische Lösungen, die weder für die kleinste, noch für die größte Hauptspannung eine Orientierung in Richtung des Einfallens der Subduktionszone ergeben hatten. Die Größe der Symbole ist ein Maß für die Zuverlässigkeit der herdmechanischen Lösungen. Als wichtigstes

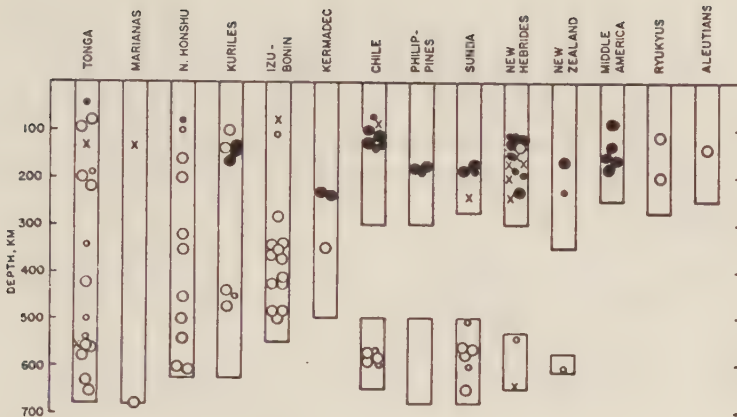


Abb. 12: Verteilung von Zug- und Druckspannungen in verschiedenen Subduktions-Zonen aufgrund von Untersuchungen der Herdmechanismen von Tiefen-Beben nach ISACKS und MOLNAR (1969). Offene Kreise symbolisieren Druck-Spannungen, geschlossene Kreise Zug-Spannungen in Richtung des Einfallens der Subduktionszonen.

Ergebnis bleibt festzuhalten, daß bei der Mehrheit der Subduktionszonen in der oberen Hälfte Dilatation und in der unteren Hälfte Kompression beobachtet wird. In mittleren Tiefen ist die Seismizität häufig gering oder fehlt vollständig.

Für die Berechnung der deviatorischen Spannungen nach der Konvektions-Theorie können wir die Dichte in erster Näherung als konstant ansehen. Durch einfache Tensor-Rechnung kann man unter dieser Voraussetzung aus Gleichung (11) ableiten, daß lokal die maximale Scherspannung $\sigma_{s,max}$ bei einer zweidimensionalen Strömung durch den Ausdruck

$$(52) \quad \sigma_{s,max} = \gamma \sqrt{4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}$$

beschrieben wird, und daß dieses Maximum an einem Flächenelement auftritt, dessen Normalen-Vektor mit der x-Achse den Winkel $\gamma_{s,max}$ bildet, mit

$$(53) \quad \tan(2\gamma_{s,max}) = \pm \frac{2 \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}}$$

Die Richtung der maximalen Scherspannung ist im allgemeinen nicht mit der Richtung der Stromlinien identisch. Aus Gleichung (52) ergibt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang mit der Energiedissipation. Setzt man auch in Gleichung (11a) $\text{div } \vec{v} = 0$, so folgt durch Vergleich mit (52):

$$\sigma_{s,max}^2 = \gamma \phi$$

Die in den Abbildungen 13b und 14b,c dargestellten Linien gleicher Energiedissipation sind daher zugleich Linien gleicher maximaler Scherspannungen. Für den Bereich der Subduktionszonen, d.h. für $x = L/4$, folgt aus den Gleichungen (52), (30) und (31) bei konstanter Dichte:

$$(52a) \quad \sigma_{s,max} \left(\frac{L}{4}, z \right) = 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4\pi\gamma u_0}{L} \cos \pi \frac{z}{D}$$

Der Absolutwert der Scherspannungen ist also an der oberen und unteren Begrenzung der Schicht am größten und ist in der Mitte der Schicht gleich Null. Das Minimum der Seismizität in ca. 300 bis 400 km Tiefe kann also durch eine Konvektionsströmung, wie sie durch die Gleichungen (30) und (31) beschrieben wird, qualitativ erklärt werden. Die maximalen Scherspannungen greifen im Bereich der Subduktionszonen ($x = L/4$) nach Gleichung (53) unter Winkeln von 45° und -45° an. Für die Amplitude der Scherspannungen laut Gleichung (53) erhält man

auf der Basis der zuvor verwendeten numerischen Werte, d.h. mit $u_0 = 1,8$ cm/Jahr, $\eta = 3 \cdot 10^{22}$ poises und $L = 14000$ km, etwa 15 bar; dieser Wert ist erstaunlich klein, insbesondere im Vergleich mit der Druck-Variation, deren Amplitude für dieselbe Konvektionsströmung 940 bar beträgt (Seite 71). Man kann hieraus lernen, daß Ungleichgewichte im Erdmantel, wie sie aus großräumigen Schwereanomalien abgeleitet werden, vermutlich weniger durch Scherspannungen, als vielmehr durch dynamische Druck-Variationen getragen werden. Innerhalb der Lithosphäre, für die von WALCOTT (1973) und LLIBOUTRY (1974) Viskositäts-Werte von 10^{25} poises angegeben werden, könnten allerdings wesentlich größere Scherspannungen als die oben errechneten 15 bar auftreten.

Da die größten Scherspannungen im Bereich des nach unten gerichteten Konvektionsstromes unter $\pm 45^\circ$ auftreten, müssen die Hauptspannungen horizontal und vertikal orientiert sein. Im Hinblick auf die in Abbildung 12 dargestellten Ergebnisse der Herdmechanik interessiert besonders, ob in Richtung der Stromlinien Kompression oder Dilatation wirksam ist. Die deviatorische Normalspannung, die in Richtung der Stromlinien wirksam ist, erhält man gemäß

$$\sigma_n(x, z) = \frac{\vec{v}}{v} \left[\frac{\vec{v}}{v} (\sigma_{zz}) \right]$$

Das Produkt in der eckigen Klammer liefert zunächst den Spannungsvektor, der am Flächenelement senkrecht zu $\vec{v}$ angreift; die nochmalige Multiplikation mit dem Einheitsvektor $\vec{v}/v$ liefert die Normal-Spannung in Richtung von $\vec{v}$. Nach Ausführung der Multiplikation unter der vereinfachenden Annahme $\text{div } \vec{v} = 0$ ergibt sich:

$$\sigma_n(x, z) = \frac{2\eta}{v^2} \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} + uw \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (54)$$

Im Zentrum des absteigenden Konvektionsstromes ($x = L/4$) ist $u=0$ und (54) vereinfacht sich zu:

$$\sigma_n\left(\frac{L}{4}, z\right) = 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2\pi\eta w_0}{D} \cos \pi \frac{z}{D} \quad (54a)$$

Die vertikale deviatorische Normal-Spannung ist also in der oberen Hälfte des absteigenden Konvektionsstromes eine Zugspannung ($\cos \theta > 1$) und in der unteren Hälfte eine Druckspannung ($\cos \theta < 1$). Dies entspricht genau der Spannungs-Verteilung, die aufgrund der Herdmechanik der Tiefen-Beben für die meisten Subduktionszonen abgeleitet wurde (vgl. Abb. 12).

Die Befunde der Herdmechanik sind verschiedentlich als Hinweis darauf interpretiert worden, daß das Übergewicht der in den Subduktionszonen abtauchenden, relativ kalten Lithosphäre die eigentliche Antriebskraft der "Platten-Tektonik" darstellt (ISACKS und MOLNAR, 1969). Die Folgerungen aus unserer analytischen Lösung zeigen, daß diese Interpretation nicht zwingend ist, sondern daß Rayleigh-Bénard-Konvektion eine gleichartige Spannungs-Verteilung liefert. Freilich trägt auch bei diesem Typ von Konvektion das Übergewicht der abtauchenden, relativ kalten äußeren Schichten sehr stark zum Antrieb bei, ohne deswegen allerdings allein maßgeblich zu sein (vgl. Abb. 10).

Nach unserer Überzeugung ist es nicht angebracht, zwischen Rayleigh-Bénard-Konvektion und "Platten-Konvektion" durch künstliche Definitionen einen Gegensatz zu schaffen, der durch die zugrunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten nicht gerechtfertigt ist. Wir sind vielmehr zuversichtlich, daß bei einer Weiterentwicklung der Konvektions-Theorie, insbesondere unter Berücksichtigung der Variationen der Material-Parameter, über das bisher Erreichte hinaus auch jene charakteristischen Details der Geotektonik zutreffend beschrieben werden können, die in der "Platten-Tektonik" in den Vordergrund gestellt werden.

6. Zum Problem des Zell-Verhältnisses $n=2D/L$

Im letzten Abschnitt sahen wir uns gezwungen, zur Erfüllung des beobachteten Erdwärmestromes stark abgeplattete Konvektions-Walzen anzunehmen, deren horizontale Durchmesser $L/2$ etwa das Zehnfache der Schicht-Dicke D betragen. Hieraus ergibt sich eine gewisse theoretische Schwierigkeit, da aufgrund der bislang vorliegenden theoretischen Arbeiten und aufgrund der experimentellen Untersuchungen an einfachen Medien die Entstehung solcher stark abgeplatteter Konvektions-Walzen nicht verstanden werden kann.

Theoretisch wäre zu erwarten, daß Konvektion zunächst - dem Minimum der kritischen Rayleigh-Zahl entsprechend (vgl. Abb. 8) - mit einer horizontalen Wellenlänge $L=2\sqrt{2}D$ einsetzt; bei zunehmender Rayleigh-Zahl sollte die Wellenlänge, entsprechend der aus der linken Seite von Gleichung (41) erwachsenden Bedingung $n^2=1$, in $L=2D$ übergehen. Im Gegensatz zu unserer Annahme im letzten Abschnitt sagt also die Theorie keine Vergrößerung, sondern eine Verkleinerung der Walzen-Durchmesser mit zunehmender Rayleigh-Zahl voraus. Ein solches Verhalten der Konvektions-Walzen folgt nicht nur aus der hier entwickelten Theorie, sondern beispielsweise auch aus einem von MALKUS (1954) postulierten Extremal-Prinzip, wonach diejenige Strömung stabil sein soll, welche maximalen Wärmetransport durch die Schicht bewirkt. MOORE und WEISS (1973) haben durch umfangreiche numerische Modell-Rechnungen im Rahmen der Boussinesq-Approximation gezeigt, daß das Maximum des Wärmetransports bei großen überkritischen Rayleigh-Zahlen für Konvektions-Walzen mit $L=2D$ angenommen wird. Leider gibt es keine experimentellen Untersuchungen über Konvektion zwischen scherspannungsfreien Begrenzungen, an denen diese theoretischen Vorhersagen, die unserer Annahme im letzten Abschnitt entgegenstehen, überprüft werden könnten.

Umfangreiche Experimente gibt es dagegen für Konvektion zwischen festen Grenzen. Auch hierfür wird von der Theorie her eine Abnahme der horizontalen Durchmesser der Konvektions-Rollen mit zunehmender Rayleigh-Zahl erwartet (BUSSE, 1967). Tatsächlich wird jedoch im Experiment eine Zunahme der horizontalen Durchmesser mit zunehmender Rayleigh-Zahl beobachtet (CHEN und WHITEHEAD, 1968; WILLIS et al., 1972; FARHADIEH und TANKIN, 1974). Nach FARHADIEH und TANKIN nimmt innerhalb des Stabilitäts-Gebietes der Konvektions-Rollen deren Durchmesser mit zunehmender Rayleigh-Zahl etwa um den Faktor zwei zu.

Dieser Widerspruch zwischen Theorie und Experiment, der auch für die ansonsten so erfolgreiche Theorie von BUSSE (1967) gegeben ist, macht deutlich, daß bislang der Mechanismus der Zell-Anpassung selbst unter den in den zitierten Experimenten realisierten idealen Bedingungen noch nicht verstanden wird. (Der Verdacht liegt nahe, daß im Bereich überkritischer Rayleigh-Zahlen der horizontale Durchmesser der Konvektions-Rollen durch einen oder mehrere Terme determiniert wird, die im Rahmen der üblichen Boussinesq-Approximation vernachlässigt werden.) Unter diesen Umständen erscheint die häufig anzutreffende Schlußfolgerung, daß auch im Erdmantel das Zell-Verhältnis (aspect ratio) $n=2D/L$ von der Größenordnung 1 sein sollte, zumindest als verfrüht. Insbesondere kann dies - entgegen der Auffassung von RICHTER (1973) - kein Argument sein, um Rayleigh-Bénard-Konvektion als Antriebsmechanismus für die Platten-Tektonik auszuschließen. Solange es theoretisch nicht einmal gelingt, die Entwicklung der Walzen-Durchmesser als Funktion der Rayleigh-Zahl für einfache Medien mit konstanten Material-Parametern zutreffend zu beschreiben, hat man keine Handhabe, die einschlägigen Ergebnisse auf die viel komplizierteren Verhältnisse im Erdmantel zu übertragen. In dieser Situation halten wir es vielmehr für gerechtfertigt, das Zell-Verhältnis, wie im Abschnitt B 5 geschehen, derart anzupassen,

daß der beobachtete Erdwärmestrom erklärt wird. Dabei kann zunächst offen bleiben, welches die Ursachen für die starke Abplattung der Konvektions-Walzen im Erdmantel sind.

Vorübergehend schien eine Möglichkeit gefunden, die starke Abplattung der Konvektions-Walzen im Erdmantel zu erklären. TRITTON und ZARRAGA (1967) hatten in qualitativen Modell-Experimenten Konvektion in einer horizontalen Schicht untersucht, die nicht von unten, sondern durch innere Wärmequellen beheizt wurde. Experimentell wurde dies durch Verwendung einer elektrisch leitenden Flüssigkeit erreicht, die durch einen elektrischen Strom erwärmt wurde. Bei hinreichend großer überkritischer Rayleigh-Zahl bildeten sich flache Konvektions-Zellen, die als Abstand zwischen den Zonen auf- und absteigender Strömung etwa das 5-fache der Schichtdicke aufwiesen. Da auch im Erdmantel die Erwärmung, zumindest teilweise, durch innere Quellen erfolgt, glaubte man hierin den Grund für die Abplattung der Konvektions-Zellen gefunden zu haben. Eine entsprechende theoretische Untersuchung von ROBERTS (1967) bestätigte diese Deutung jedoch nicht. (Auch aufgrund der Ausführungen im Abschnitt B 5 ist kein prinzipieller Unterschied zwischen der Erwärmung von unten und durch innere Wärmequellen zu erwarten.) Eine Wiederholung der Experimente von TRITTON und ZARRAGA (1967) durch SCHWIDERSKI und SCHWAB (1971) führte zu dem Ergebnis, daß die Abplattung der Konvektions-Zellen nicht in der Erwärmung durch innere Quellen begründet sein kann, sondern vermutlich auf ungleichmäßige Erwärmung - bedingt durch die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der verwendeten Flüssigkeiten - zurückzuführen ist. Wenngleich also die Hypothese von TRITTON und ZARRAGA, daß Erwärmung durch innere Quellen zu abgeplatteten Konvektions-Zellen führt, als widerlegt gelten muß, besteht die Bedeutung ihrer Arbeit doch in dem Nachweis, daß die Entstehung stark abgeplatteter Konvektions-Zellen hydro-

dynamisch prinzipiell möglich ist.

Wenn die Interpretation von SCHWIDERSKI und SCHWAB (1971) zutrifft, daß die Abplattung auf inhomogene Wärmeproduktion zurückzuführen ist, könnte hier zugleich eine Erklärung für die Geometrie der Konvektions-Walzen im Erdmantel liegen, da wir auch hier nicht mit homogenen verteilten Wärmequellen rechnen können. Vermutlich ist dies aber nicht der einzige Grund. BUSSE (1967a) hat theoretisch gezeigt, daß jegliche Variation der Material-Parameter die Geometrie der Konvektions-Ströme beeinflusst. Die Temperaturabhängigkeit verschiedener Material-Parameter führt beispielsweise dazu, daß in einem gewissen Intervall der Rayleigh-Zahl unmittelbar oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl Konvektion in hexagonalen Zellen gegenüber der Walzen-Konvektion bevorzugt ist. Über die Variation des Zell-Verhältnisses konnte BUSSE (1967a) allerdings keine Aussagen machen, da er es fest vorgegeben hatte.

Generell gewinnt man bei der Durchsicht der vorliegenden experimentellen und theoretischen Untersuchungen den Eindruck, daß die energetischen Eigenschaften der Konvektion, also insbesondere die Strömungsgeschwindigkeiten und der Wärmetransport, neben den Randbedingungen vorwiegend durch die Mittelwerte der Material-Parameter bestimmt werden, daß aber die Geometrie der Konvektionsströme in hohem Maße durch die Variation der Material-Parameter beeinflusst wird. Dies mag als weitere Begründung dafür genügen, daß wir uns zwar über die aus Gleichung (41) folgende Geometrie-Bedingung $n=1$ hinweggesetzt haben, daß wir aber die Amplituden-Bedingung (42) auf den Erdmantel angewendet haben.

Eine mögliche Erklärung der starken Abplattung der Konvektions-Walzen im Erdmantel ergibt sich aus der folgenden Betrachtung: Wir fragen uns zunächst, worin die sich aus Gleichung (41)

und aus den numerischen Modell-Rechnungen von MOORE und WEISS (1973) ergebende Bevorzugung von Konvektions-Walzen mit $n=1$ in Medien mit konstanten Material-Parametern begründet ist. Die Herleitung im Abschnitt B 5 zeigt, daß sich die Bedingung $n=1$ aus der Berücksichtigung der Energiedissipation in der Wärmeleitungsgleichung ergibt. Dies erinnert an einen bereits von HELMHOLTZ (1869) und später unter allgemeineren Voraussetzungen von PÄSLER (1959) bewiesenen Minimal-Satz. Hiernach stellt sich bei gegebenen Randbedingungen eine stationäre Strömung in einer barotropen Flüssigkeit derart ein, daß die Energiedissipation ein Minimum ist, sofern die Massenkräfte ein Potential haben und die nicht-linearen Trägheitsglieder vernachlässigt werden können. Da bei Konvektion die Voraussetzung der Barotropie naturgemäß nicht erfüllt ist, können wir diesen Satz nicht streng anwenden. Wegen der Kleinheit der durch die Temperatur-Variation bedingten Dichte-Variation können wir aber erwarten, daß das Prinzip minimaler Energiedissipation wenigstens näherungsweise auch bei Konvektion standhält.

Indem wir gemäß

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{DL} \int_0^D \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi \, dx \, dz$$

aus Gleichung (36) den Mittelwert der Energiedissipation in der Schicht berechnen, erhalten wir bei konstanter Viskosität η_0 :

$$\overline{\Phi} = \frac{\pi^2 \eta_0 \omega_0^2}{4 D^2} \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \quad (55)$$

Durch partielle Differentiation nach n erkennt man, daß dieser Ausdruck für $n=1$ ein Minimum annimmt, d.h. die Bevorzugung der Konvektions-Rollen mit $n=1$ scheint tatsächlich aus dem Prinzip minimaler Energiedissipation verstanden werden zu können.

Die Abbildung 13 verdeutlicht diesen Sachverhalt. In Abb. 13a sind die Stromlinien und in Abb. 13b die Linien gleicher Energiedissipation nach Gleichung (36) für Konvektions-Rollen mit dem horizontalen Durchmesser $L/2=D$ dargestellt. Die Zahlen an den Linien gleicher Energiedissipation (die nach Seite 80 zugleich Linien gleicher maximaler Scherspannung sind) geben relative Werte an; um absolute Werte zu erhalten, sind sie mit

$$\phi_0 = \eta \left(\frac{\pi w_0}{D} \right)^2$$

zu multiplizieren. Dank der speziellen Geometrie $L/2=D$ ist im Innern der Konvektions-Rollen die Energiedissipation prak-

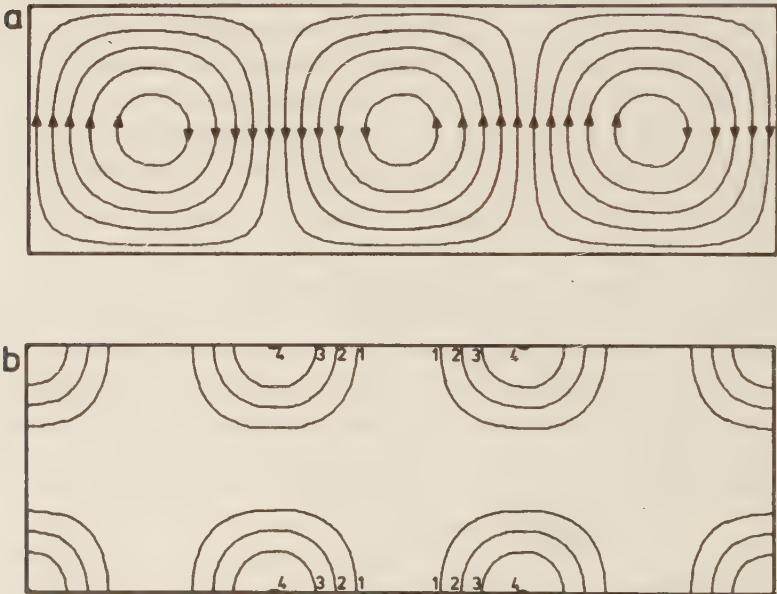


Abb. 13: Stromlinien (a) und Linien gleicher Energiedissipation (b), bzw. gleicher maximaler Scherspannungen für Konvektions-Rollen mit quadratischem Querschnitt ($L=2D$). Der Kern der Rollen rotiert nahezu wie ein starrer Körper.

tisch Null und die Stromlinien sind nahezu kreisförmig. Das Minimum der Energiedissipation für $n=1$ beruht also darauf, daß in diesem Falle der Kern jeder Konvektions-Rolle praktisch wie ein starrer Körper rotiert.

Für abgeplattete Konvektions-Rollen, dargestellt in Abbildung 14 am Beispiel $L/2=3D$, ist eine der Rotation eines starren Körpers ähnliche Bewegung des Kerns der Konvektions-Rollen nicht möglich. Während die in Abb. 14a dargestellten Stromlinien durch eine einfache Dehnung in Horizontal-Richtung aus den Stromlinien in Abb. 13a hervorgehen, hat sich das Bild der Linien gleicher Energiedissipation, bedingt durch die Nicht-Linearität dieser Größe, grundlegend geändert. Statt eines Kerns mit sehr kleiner Energiedissipation weist die Abbildung 14b ein ausgeprägtes Maximum der Energiedissipation und damit auch der Scherspannungen im Zentrum der Konvektions-Rolle auf. Es darf vermutet werden, daß eine solche Situation hydrodynamisch instabil ist, da sich bei den bekannten stabilen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen die Maxima der Energiedissipation an den Berandungen der Flüssigkeit befinden.

Wenn dennoch im Erdmantel stark abgeplattete Konvektions-Walzen auftreten, mag dies an der Variation der Viskosität mit der Tiefe und insbesondere an der Existenz der Asthenosphäre liegen (vgl. Abb. 6). In Abbildung 14c sind die Linien gleicher Energiedissipation dargestellt, die sich nach Gleichung (36) ergeben, wenn nicht mit einer konstanten Viskosität, sondern mit einer Tiefenabhängigkeit der Form

$$\eta(z) = \eta_0 \left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0} \cos 2\pi \frac{z}{D} \right)$$

gerechnet wird; durch diesen Ansatz wird unter Wahrung des Mittelwertes η_0 schematisch eine Zone verringerter Viskosität im mittleren Teil der Schicht beschrieben. Für die Darstellung in Abb. 14c wurde $\Delta\eta/\eta_0 = 0,99$ gesetzt, also eine Abnahme der

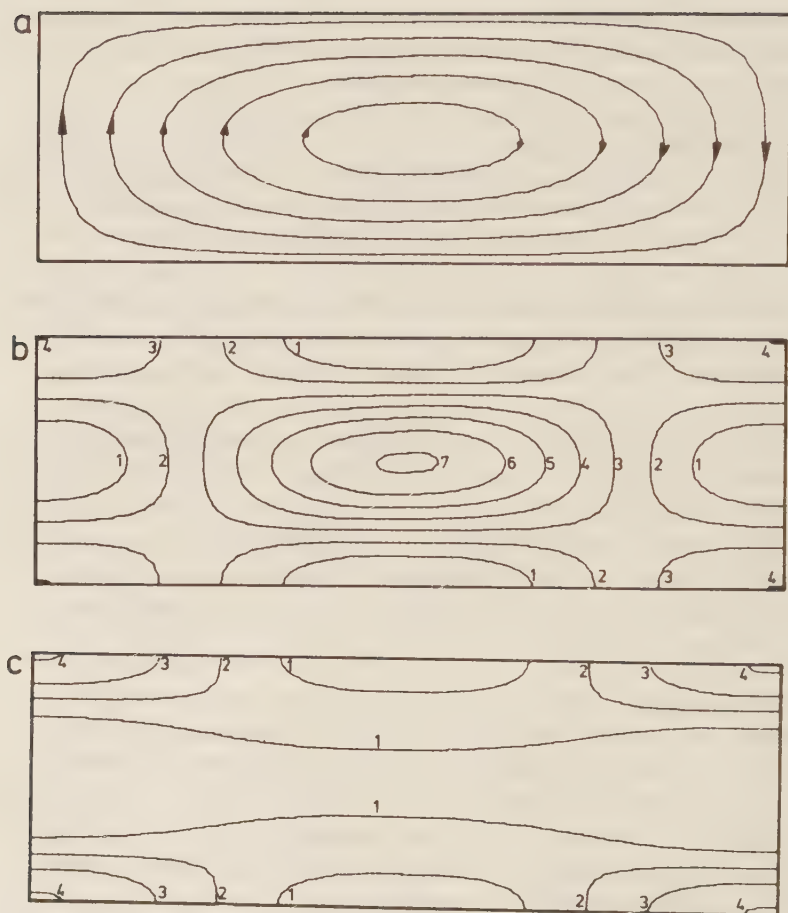


Abb. 14: Stromlinien (a) und Linien gleicher Energiedissipation (b) bei konstanter Viskosität für abgeflachte Konvektionsrollen ($L=6D$); das Maximum der Energiedissipation und der Scherspannungen liegt nun, anders als in Abb. 13, im Zentrum der Konvektions-Rolle. Bei Annahme einer Variation der Viskosität von der Form $\eta = \eta_0(1 + 0,99 \cos 2\pi z/D)$, d.h. bei Annahme einer Asthenosphäre mit einer 1/100 kleineren Viskosität, und Beibehaltung der Geometrie der Strömung ergeben die Linien gleicher Energie-dissipation das Bild c), welches wieder mehr Ähnlichkeit mit Abb. 13 b) aufweist. Es darf vermutet werden, daß die Ausbildung abgeflachter Konvektions-Rollen durch die Existenz der Asthenosphäre im Erdmantel begünstigt wird.

Viskosität in der Asthenosphäre um zwei Zehner-Potenzen angenommen. Wie man sieht, ist nunmehr das in Abb. 14b vorhandene Maximum der Energiedissipation im Zentrum der Konvektions-Rolle verschwunden, und die Linien gleicher Energiedissipation weisen wieder eine gewisse Ähnlichkeit mit dem bei konstanter Viskosität bevorzugten Fall $n=1$ (Abb. 13b) auf.

Es scheint daher plausibel, daß die Entstehung stark abgeplatteter Konvektions-Rollen im Erdmantel durch die Existenz der Asthenosphäre begünstigt wird. Es scheint einleuchtend, daß die relativ hoch-viskose und daneben auch elastische Lithosphäre nicht alle 700 km subduziert werden kann. Aufgrund der formal gleichartigen Stellung der Temperatur-Leitfähigkeit in der Rayleigh-Zahl (Gleichung 43) kann vermutet werden, daß auch das Minimum der Temperaturleitfähigkeit in 100 bis 200 km Tiefe ähnlich dem der Viskosität die Ausbildung abgeflachter Konvektions-Walzen begünstigt.

Es ist klar, daß die in diesem Abschnitt wiedergegebenen Überlegungen weitgehend den Charakter von Plausibilitäts-Betrachtungen haben. Eine strengere Stabilitäts-Analyse unter Verwendung realistischerer Stoff-Gesetze für den Erdmantel wäre sehr zu wünschen, war aber nicht Ziel der vorliegenden Untersuchung.

7. Der Einfluß von Phasenumwandlungen auf Konvektionsströme im Erdmantel

Bei der Entwicklung der Theorie in Abschnitt B 5 ist der Erdmantel als chemisch und physikalisch homogen vorausgesetzt worden. Diese Voraussetzung trifft nicht voll zu. Durch seismologische und hochdruck-petrologische Untersuchungen (vgl. S. 12-17) wissen wir, daß im Erdmantel mit einer Reihe von Phasenumwandlungen zu rechnen ist. Da Phasengleichgewichte durch Druck und Temperatur bestimmt werden, müssen die durch Konvektion erzeugten Druck- und Temperatur-Variationen zu Undulationen der Phasengrenzen im Erdinnern führen. Es ist plausibel, daß die hiermit verbundenen lateralen Dichteänderungen rückwirkend die Konvektion beeinflussen. Dieser Einfluß dürfte nicht zu vernachlässigen sein, da einige Phasenänderungen, wie zum Beispiel die Olivin-Spinell-Umwandlung und die vermutliche Disproportionierung in Oxyde, mit Dichteänderungen von 8 bis 10 % verknüpft sind, wogegen die normale thermische Dehnung bei Temperatur-Variationen von einigen 100 °C (vgl. S. 71) nur Dichteänderungen von etwa 1 % bewirkt.

Der Einfluß von Phasenumwandlungen auf Konvektionsströme im Erdmantel ist mehrfach untersucht worden - zum Teil mit recht kontroversen Ergebnissen (VENING MEINESZ, 1957 u. 1962; KNOPOFF, 1964; VERHOOGEN, 1965; GEBRANDE, 1966, 1967 u. 1973; SCHUBERT und TURCOTTE, 1971; TURCOTTE und SCHUBERT, 1971; RINGWOOD, 1972a; RICHTER, 1973 a,b).

Zu extremen und diametral entgegengesetzten Auffassungen gelangten VENING MEINESZ und KNOPOFF. VENING MEINESZ glaubte nachweisen zu können, daß die Instabilität des Erdmantels durch die Phasenumwandlungen im mittleren Mantel um den Faktor 4,4 erhöht würde; KNOPOFF dagegen gelangte zu der Überzeugung, daß diese Phasenumwandlungen eine für Konvektionsströme unüberwindbare Schranke darstellen sollten. Beide Ergebnisse haben

sich als unzutreffend und als Folge unzulässiger Vereinfachungen erwiesen.

Aufgrund einer differenzierteren Betrachtung gelangte VERHOOGEN zu der Schlußfolgerung, daß univariante Phasenänderungen im Erdmantel ein geringes, aber kein unüberwindbares Hindernis für Konvektionsströme darstellen dürften und daß multivariante Umwandlungen praktisch kein Hindernis bedeuten sollten. GEBRANDE (1966, 1967) konnte zeigen, daß univariante Phasenumwandlungen in einem Konvektionsstrom nicht diskontinuierlich längs scharfer Phasengrenzen, sondern innerhalb mehr oder weniger breiter Übergangszonen erfolgen, sobald die Strömungsgeschwindigkeit einen gewissen kritischen Wert übersteigt, der durch die thermodynamischen Eigenschaften der Phasenumwandlungen und die Temperaturleitfähigkeit bestimmt wird. Diese kritische Geschwindigkeit wurde für die damals noch hypothetische Olivin-Spinell-Umwandlung auf 0,1 cm/Jahr abgeschätzt; aufgrund der heute verfügbaren experimentellen Daten ist eine kritische Geschwindigkeit von etwa 0,2 cm/Jahr wahrscheinlicher. Größere vertikale Geschwindigkeiten des Konvektionsstromes sind nur möglich, wenn auch der konvektive Wärmetransport einen gewissen kritischen Wert übersteigt, der von der Größenordnung des beobachteten Erdwärmeflusses ist.

Eine strenge mathematische Analyse des linearen Stabilitätsproblems für Medien mit einer univarianten Phasenumwandlung haben BUSSE und SCHUBERT (1971) durchgeführt, die von SCHUBERT und TURCOTTE (1971) auf die Olivin-Spinell-Umwandlung im Erdmantel übertragen wurde. Sie fanden, daß die Olivin-Spinell-Umwandlung in Abhängigkeit von der Viskosität des Erdmantels sowohl stabilisierend, wie auch instabilisierend wirken kann. Nach diesen Ergebnissen scheint Konvektion über die Phasengrenze Olivin-Spinell hinweg möglich; der erforderliche überadiabatische Temperaturgradient wäre

aber größer als im Falle ohne Phasenumwandlung, sofern die kinematische Viskosität des Erdmantels kleiner als $10^{24} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ist. Über den Einfluß der Phasenumwandlungen auf die Geschwindigkeit der Konvektionsströmung konnten im Rahmen der linearisierten Theorie keine Aussagen gemacht werden.

RICHTER (1973 a,b) hat diesen Einfluß in einigen wenigen Parameter-Kombinationen durch numerische Modell-Rechnungen untersucht und findet in Übereinstimmung mit Ergebnissen von GERBRANDE (1973), daß durch die Olivin-Spinell-Umwandlung die Amplitude der Konvektion im Vergleich zur Konvektion eines homogenen Mantels etwa verdoppelt wird. Die Übereinstimmung ist aber weniger befriedigend, als es auf den ersten Blick scheinen mag, da RICHTERs Berechnungen unter der Annahme $\alpha g D^3 = \chi \gamma / ^\circ\text{C}$ durchgeführt wurden, die für den Erdmantel als unrealistisch bezeichnet werden muß und auch in grobem Widerspruch zu den von RICHTER an anderer Stelle (innerhalb derselben Arbeiten) verwendeten Parametern steht.

Im folgenden wollen wir die im Abschnitt B 5 entwickelte Theorie derart erweitern, daß sie näherungsweise auch auf Medien mit Phasenumwandlungen angewendet werden kann. Zunächst stellen wir zur Erläuterung der physikalischen Zusammenhänge einige mehr heuristische Betrachtungen voran.

Es ist leicht einzusehen, daß die Steigung der Phasengrenzkurve im p-T-Diagramm, die nach der Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$(56) \quad \frac{dT^*}{dp} = \frac{\Delta \rho T^*}{\rho_1 \rho_2 L^*} = \frac{-\Delta \rho}{\rho_1 \rho_2 \Delta s}$$

mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 der beiden Phasen, der Dichtedifferenz $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, der latenten Wärme L^* und der absoluten Temperatur T^* , bzw. der Differenz der spezifischen Entropien Δs verknüpft ist, eine maßgebliche Größe für die Wechselwirkung

zwischen Konvektion und Phasenumwandlung ist. (Die latente Wärme L^* ist hier als diejenige Wärmemenge eingeführt, die bei der Umwandlung in die dichtere Phase pro Masseneinheit freigesetzt wird. Der hochgestellte Stern (*) charakterisiere die Bedingungen längs der Phasengrenzkurve.) In Abbildung 15 bedeute die fette Linie eine Phasengrenzkurve - links mit positiver, rechts mit negativer Steigung entsprechend positiver bzw. negativer latenter Wärme -, die dünne durchgezogene Linie die mittlere Temperatur als Funktion der Tiefe und die gestrichelte Linie die Temperatur in einem nach unten gerichteten Konvektionsstrom. Letztere ist näherungsweise eine Adiabate. Da bei freier Konvektion

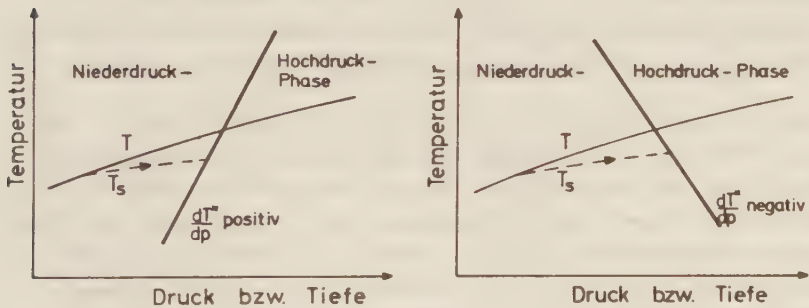


Abb. 15: Zur Erläuterung der unterschiedlichen Wirkung von Phasenumwandlungen mit positiver und negativer Steigung der Phasengrenzkurve. Bei positiver Steigung (links) wird die Hochdruck-Phase im absteigenden Konvektionsstrom in geringerer, bei negativer Steigung in größerer Tiefe als in der Umgebung erreicht.

die Temperatur im absteigenden Konvektionsstrom kleiner als die mittlere Temperatur ist, wird die Phasengrenze zur dichteren Phase bei positiver Steigung dT^*/dp in geringerer Tiefe erreicht als in der Umgebung. Die schwerere Phase liegt also im absteigenden Konvektionsstrom bereits in einer Tiefe vor, in welcher in der Umgebung noch die leichtere Phase vorhanden ist. Das Übergewicht, welches den Konvektionsstrom ab-

sinken läßt, wird daher durch die Phasenumwandlung weiter vergrößert. Ein komplementärer Effekt spielt sich im aufsteigenden Konvektionsstrom ab (in der Abbildung nicht dargestellt); hier erfolgt die Phasenumwandlung in größerer Tiefe als in der Umgebung, wodurch ein zusätzlicher Auftrieb entsteht, der den Konvektionsstrom nach oben treibt.

Entgegengesetzt wirkt sich eine Phasenumwandlung mit negativer Steigung der Phasengrenze (rechte Seite von Abbildung 15) aus. In diesem Fall wird im absteigenden Konvektionsstrom die dichtere Phase erst in größerer Tiefe als in der Umgebung erreicht; das leichtere Material erfährt daher einen Auftrieb, welcher der ursprünglichen Bewegung des Konvektionsstromes entgegengerichtet ist. In analoger Weise entsteht durch die relative Hochlage der Phasengrenze im aufsteigenden Konvektionsstrom ein der primären Bewegung entgegengerichteter Abtrieb.

Aufgrund dieser einfachen Betrachtung wird man erwarten, daß Phasenänderungen Konvektion begünstigen bzw. behindern, je nachdem ob die Steigung der Phasengrenzkurve positiv oder negativ ist. Diese Schlußfolgerung sollte auch erhalten bleiben, wenn die Phasenänderung nicht längs einer Phasengrenzkurve, sondern wie im Falle der bivarianten Olivin-Spinell-Umwandlung innerhalb einer Übergangszone von entsprechender Steigung im p-T-Diagramm (vgl. Abb. 16) erfolgt.

In diesem Zusammenhang ist von besonderem Interesse, daß die in 650 km Tiefe vermutete und durch die Hochdruck-Untersuchungen von KUMAZAWA et al. (1974) und MING und BASSET (1975) teilweise bestätigte Disproportionierung in Oxyde aufgrund thermodynamischer Berechnungen von ANDERSON (1967a) sowie MAO et al. (1969) längs einer Phasengrenzkurve mit negativer Steigung erfolgen sollte. Es ist also zu erwarten, daß diese Phasenumwandlung Konvektion behindert und aus diesem Grund vermutlich die untere Begrenzung der Konvektionsströme im Erdmantel bildet. Sowohl die Tiefen-Verteilung der Erdbeben, wie auch die Folgerungen aus der Untersuchung des Wirkungsgrades (Abschnitt B 4.3)

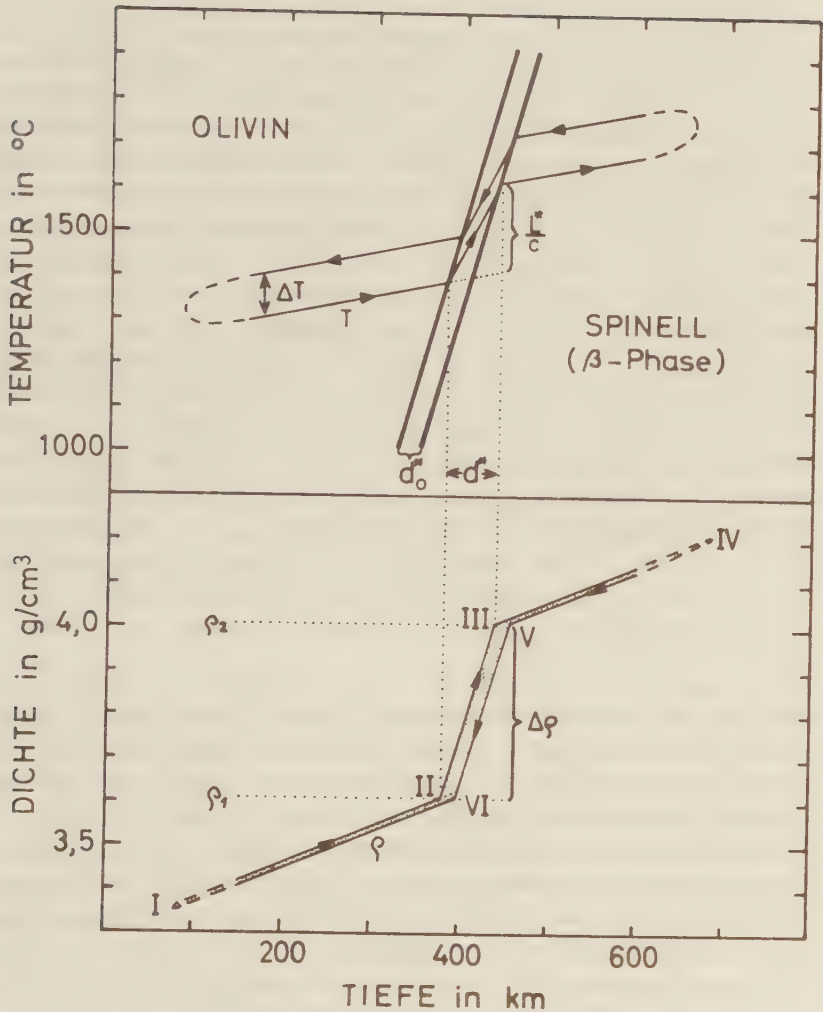


Abb. 16: Schematische Darstellung des Temperatur- und Dichte-Verlaufs entlang einer Stromlinie bei Konvektion über die Olivin-Spinell-Grenze hinweg. Die latente Wärme L^* bedingt eine Überadiabatische Temperaturzunahme um L^*/c innerhalb der Übergangszone. Das Integral der Dichte längs der Stromlinie, d.h. die punktierte Fläche in der unteren Bild-Hälfte ist dem Auftrieb proportional. Ohne Phasenumwandlung wäre er nur etwa halb so groß.

stützen diese Deutung.

Die Abbildung 16 gibt eine schematische, aber in wichtigen Zügen realistische Darstellung des Temperatur- und Dichteverlaufs in einem Konvektionsstrom, der die Olivin-Spinell-Grenze durchdringt. In der oberen Hälfte der Abbildung gibt das durch die fetten Linien begrenzte Band den Bereich an, innerhalb dessen Olivine und Spinelle natürlicher Zusammensetzung koexistieren. Die Breite dieses Bereichs entspricht dem in Abb. 4 wiedergegebenen Zustandsdiagramm nach RINGWOOD (1972) für ein Mg/Fe-Verhältnis von 89/11 (Pyrolit-Modell); für die Steigung wurde der von ITO et al. an natürlichem Olivin gemessene Wert von $54 \text{ bar}/^{\circ}\text{C}$ zugrunde gelegt. (Der von GEBRANDE (1967) aufgrund thermodynamischer Berechnungen unter Verwendung seismischer Daten abgeleitete Wert von $61 \text{ bar}/^{\circ}\text{C}$ ist nur unwesentlich größer.) Die dünnere, teilweise unterbrochene Linie gibt den Verlauf der Temperatur längs einer Stromlinie im Konvektionsstrom an; die Pfeile deuten die Richtung der Strömung an. Im unteren Teil der Abbildung 16 ist der zugehörige Verlauf der Dichte dargestellt.

Verfolgen wir ein Volumenelement, welches sich ausgehend vom Punkt I im Tiefe-Dichte-Diagramm im absteigenden Konvektionsstrom nach unten bewegt: In der homogenen Phase ändern sich Dichte und Temperatur in hinreichender Entfernung von der Oberfläche näherungsweise adiabatisch. In der Tiefe II wird der Koexistenz-Bereich der beiden Phasen erreicht und die Umwandlung in die Spinell-Phase beginnt. Da es sich um eine bivariente Umwandlung handelt, nimmt der Prozentsatz der Spinell-Phase mit größer werdender Tiefe stetig zu, bis am Punkt III die Umwandlung abgeschlossen ist. Die bei der Umwandlung kontinuierlich freigesetzte latente Wärme führt über die normale adiabatische Erwärmung hinaus zu einer Temperaturerhöhung in der Übergangszone. Die pro Masseneinheit freiwerdende latente Wärme L^* führt insgesamt bei Vernachlässigung der Wärmeleitung in der Phasenübergangs-Zone zu einer Temperaturerhöhung um L^*/c .

Vom Punkt III an bewegt sich das betrachtete Volumenelement wieder annähernd adiabatisch nach unten, bis es bei Annäherung an die untere Begrenzung im Bereich des horizontalen Verlaufs der Stromlinie durch Wärmeleitung zunehmend erwärmt wird - bei der hier betrachteten Stromlinie um etwa 100°C - und den für den Wiederaufstieg erforderlichen Auftrieb gewinnt (gestrichelte Kurve bei Punkt IV der Abb. 16). Beim Wiederaufstieg wird nun die untere Grenze des Koexistenz-Bereichs bereits in größerer Tiefe (Punkt V) als auf dem Weg nach unten erreicht, und auch die Umwandlung in die Olivin-Phase ist bereits in größerer Tiefe abgeschlossen (Punkt VI). Bei dieser Umwandlung wird die latente Wärme verbraucht, wodurch in der Übergangszone die Temperatur um L^*/c abnimmt. Durch weiteren Aufstieg in der Olivin-Phase und horizontale Bewegung unter Wärmeverlust durch Leitung nahe der Erdoberfläche gelangt das betrachtete Volumenelement zum Ausgangspunkt I zurück.

Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Schlußfolgerungen:

1. Konvektion über Phasengrenzen hinweg erfordert eine um L^*/c größere Temperaturdifferenz zwischen der unteren und oberen Begrenzung des konvektierenden Mediums als in einer homogenen Phase. (Diese Schlußfolgerung ändert sich nicht, wenn die Wirkung der Wärmeleitung, die oben im Bereich der Phasenübergangszone vernachlässigt wurde, berücksichtigt wird. Infolge der Wärmeleitung diffundiert zwar ein Teil der freigesetzten latenten Wärme aus der Übergangszone heraus - insbesondere die Knicke im Temperaturverlauf an den Grenzen der Übergangszone werden gerundet - aber insgesamt muß die überadiabatische Temperaturzunahme um L^*/c in der Übergangszone und ihrer näheren Umgebung doch erhalten bleiben.) In dieser Bedingung kommt also eine konvektions-hemmende Wirkung von Phasenumwandlungen mit positiver latenter Wärme zum Ausdruck.

2. Daneben gibt es eine konvektions-fördernde Wirkung, die zum Tragen kommt, sofern die Bedingung 1 erfüllt ist. Sie äußert sich darin, daß in Abbildung 16 die von der Dichte-Kurve zwischen den Punkten I bis VI umschriebene punktierte Fläche größer ist, als sie ohne Phasenumwandlung wäre. Diese Fläche, mit der Erdbeschleunigung g multipliziert, beschreibt gerade die Arbeit, die bei einem Umlauf längs der betrachteten Stromlinie pro Volumeneinheit geleistet wird. Anders gesagt: es ist die pro Volumeneinheit und Umlauf freigesetzte potentielle Energie.

Es ist nicht schwer, diese Aussagen quantitativ zu formulieren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Mitte der Phasenübergangs-Zone im statischen Fall, d.h. ohne Konvektion, gerade in der Schicht-Mitte liege. Für die Olivin-Spinell-Umwandlung ist dies keine schlechte Näherung.

Wie bei der Entwicklung der Theorie für homogene Medien im Abschnitt B 5, woran wir uns im folgenden orientieren können, fragen wir nach der Dynamik der Grund-Mode der Konvektionsströmung. Wie im homogenen Fall ist diese durch den Ansatz (30) und (31) gegeben. Auch die Beziehung für die Druck-Variation (Gleichung 32) bleibt unverändert erhalten. Zur Bestimmung der Temperatur-Variation muß jetzt allerdings auf die Gleichung (20) zurückgegriffen werden, da nun der Auftrieb nicht mehr allein durch die normale thermische Dehnung bestimmt wird. Indem wir die z -Komponente von Gleichung (20) bei konstantem x unter Berücksichtigung der Gleichungen (30) und (32) über die gesamte Schicht integrieren, erhalten wir:

$$(57) \quad g \int_{\sigma}^D \rho_0 dz = \frac{2\pi \nu \rho_0 \omega_0}{D} \frac{(1+n^2)^2}{n^2} \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

Mit dem Ansatz

$$\delta T = \delta T_0 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{z}{D}$$

für die Temperatur-Variation erhalten wir für die linke Seite von Gleichung (57)

$$g \int_0^D \delta \rho \, dz = -g \rho_0 \int_0^D \alpha \delta T_0 \, \eta_2 \, \eta_L^* \, \eta_2 \, \eta_D^* \, dz - g \Delta \rho \, \delta T_0 \left(\frac{dT^*}{dz} \right)^{-1} \eta_2 \, \eta_L^*$$

Der erste Term rechts beschreibt die Wirkung der normalen thermischen Dehnung, der zweite dagegen den Auftrieb durch die Verschiebung der Phasenübergangszone infolge der Temperatur-Variation. Dieser zweite Term ist von der Dicke der Phasenübergangs-Zone unabhängig, was anschaulich darin zum Ausdruck kommt, daß in Abbildung 16 die Fläche des Parallelogramms zwischen den Ordinaten β_1 und β_2 , die dem durch die Phasenumwandlung bedingten anormalen Auftrieb proportional ist, durch Grundlinie und Höhe eindeutig bestimmt ist.

In Gleichung (57) eingesetzt und nach δT_0 aufgelöst, erhält man

$$\delta T_0 = - \frac{\pi^2 \nu}{\alpha g \left[1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho \alpha D} \left(\frac{dT^*}{dz} \right)^{-1} \right] D^2} \frac{(1 + \eta^2)^2}{n^2} w_0 \quad (58)$$

Der Vergleich zwischen den Gleichungen (33) und (58) läßt erkennen, daß die Wirkung der Phasenumwandlung berücksichtigt werden kann, indem statt des normalen thermischen Ausdehnungskoeffizienten ein effektiver Ausdehnungskoeffizient

$$\alpha_{ef} = \alpha \left[1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho \alpha D} \left(\frac{dT^*}{dz} \right)^{-1} \right] = \alpha \left[1 + \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\alpha g D T^*} \right] \quad (59)$$

verwendet wird. Mit den Parametern für die Olivin-Spinell-Umwandlung ($\Delta \rho / \rho = 0,08$; $d\rho/dT^* = 54 \text{ bar}/^\circ\text{C}$ bzw. $dT^*/dz = 7 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$) und mit $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$, $D = 700 \text{ km}$ erhält man einen effektiven thermischen Ausdehnungskoeffizienten, der etwa um den Faktor 2,3 größer als der normale ist. Die Strömungsgeschwin-

digkeit sollte infolge der Olivin-Spinell-Umwandlung ebenfalls um den Faktor 2,3 größer sein als bei gleicher Temperatur-Variation in einem Medium ohne Phasenumwandlung.

Indem wir weiterhin der Ableitung im Abschnitt B 5 folgen, können wir die Ergebnisse für die homogenen Phasen bis einschließlich Gleichung (25a) übernehmen. Für die Phasenübergangszone ist jedoch die Wärmeleitungsgleichung zu modifizieren, da hier die Entropie nicht allein von Druck und Temperatur, sondern auch vom relativen Anteil der beiden Phasen abhängt. Bezeichnen wir mit y den prozentualen Gewichtsanteil der dichteren Phasen, so erhalten wir statt der Gleichung (12a) die Beziehung

$$(60) \quad \text{grad } s = \frac{c_p}{T} \left[\text{grad } T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \text{grad } p \right] + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_{p,T} \text{grad } y$$

wobei aufgrund der Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$(61) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_{p,T} = \Delta s = - \frac{L^*}{T^*}$$

gilt. Die Wärmeleitungsgleichung nimmt daher im stationären Fall anstelle von (18) folgende Form an:

$$(62) \quad c_p \rho \vec{v} \left[\text{grad } T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \text{grad } p - \frac{L^*}{T^*} \text{grad } y \right] = \\ = \text{div} (\lambda \text{grad } T) + h + \phi$$

Wiederholt man hiermit die verschiedenen Rechenschritte im Abschnitt B 5 unter der vereinfachenden Annahme, daß die verschiedenen Material-Parameter in beiden Phasen gleich seien und daß die Dicke d^* der Phasenübergangszone klein gegenüber der Gesamtdicke D der konvektierenden Schicht sei, so zeigt sich, daß die Phasenumwandlung näherungsweise berücksichtigt

werden kann, wenn statt des normalen adiabatischen Temperaturgradienten $(\partial T / \partial z)_s$ der effektive adiabatische Temperaturgradient

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{s,eff} = \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s + \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\alpha g D}$$

verwendet wird. Das wichtigste Ergebnis des Abschnitts B 5, die Gleichung (42), bleibt also erhalten, sofern statt der Rayleigh-Zahl, wie sie durch die Gleichungen (43) definiert ist, die modifizierte Rayleigh-Zahl

$$R^* = \frac{\alpha_{eff} \tau_{eff} g D^4}{\alpha \nu} \quad (63)$$

mit

$$\alpha_{eff} = \alpha \left[1 - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta s}{\alpha g D} \right] = \alpha \left[1 + \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\alpha g D T^*} \right] \quad (64)$$

$$\tau_{eff} = \frac{T_b - T_o}{D} - \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s - \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\alpha g D} = \tau \left[1 - \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\tau g D} \right] \quad (65)$$

verwendet wird. Konvektion über eine Phasengrenze in der Schichtmitte ist also möglich, wenn die modifizierte Rayleigh-Zahl R^* größer als die kritische Rayleigh-Zahl R_c ist. Die kritische Rayleigh-Zahl ist im Rahmen der hier entwickelten Näherungslösung wie im homogenen Fall durch die Gleichung (44) bestimmt.

Sofern die modifizierte Rayleigh-Zahl größer als die normale Rayleigh-Zahl ist, d.h. sofern

$$\frac{R^*}{R} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\alpha g D T^*} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{\tau g D} \right) > 1 \quad (66)$$

ist, wird Konvektion durch die Phasenumwandlung begünstigt. Man erkennt hieran, daß es offensichtlich zwei konkurrierende Einflüsse der Phasenumwandlung gibt. Bei kleinem über-

adiabatischem Temperaturgradienten τ und positiver latenter Wärme ist das Verhältnis $R^*/R < 1$, d.h. Konvektion wird behindert. Insbesondere ist für das Einsetzen der Konvektion eine größere Temperaturdifferenz zwischen der unteren und oberen Schichtgrenze erforderlich als im Fall ohne Phasenumwandlung. Mit zunehmender Temperaturdifferenz bzw. zunehmendem überadiabatischem Temperaturgradienten wird der nachteilige Einfluß geringer (der zweite Klammer-Ausdruck in Gleichung (66) geht gegen eins) und schließlich überwiegt der positive Einfluß der Phasenumwandlung. Umgekehrt wird durch eine Phasenumwandlung mit negativer latenter Wärme Konvektion bei kleinem überadiabatischem Temperaturgradienten gefördert, bei großem überadiabatischem Temperaturgradienten dagegen behindert.

Beim überadiabatischen Temperaturgradienten

$$\tilde{\tau} = \frac{\alpha g T^*}{g} + \frac{1}{2} \frac{L^*}{gD}$$

ist die Konvektion mit und ohne Phasenumwandlung gerade gleich intensiv ($R^*/R = 1$). Setzen wir für die Olivin-Spinell-Umwandlung $L=46$ cal/g, $T^*=1700$ °K und für die anderen Parameter wie bisher $\alpha=2 \cdot 10^{-5}$ /°K, $c_p=10^7$ erg/g °K, $g=10^3$ cm/sec² und $D=7 \cdot 10^7$ cm, so ergibt sich

$$\tilde{\tau} = 0,77 \text{ °C/km}.$$

Der tatsächliche mittlere überadiabatische Temperaturgradient zwischen 0 und 700 km Tiefe ist dagegen mit etwa 2 °C/km (vgl. Abb. 9 und 10) deutlich größer. Unter diesen Umständen wird Konvektion durch die Olivin-Spinell-Umwandlung intensiviert. Mit $\tau=2$ °C/km ergibt sich $R^*/R=1,85$, d.h. die modifizierte Rayleigh-Zahl ist fast doppelt so groß wie die normale Rayleigh-Zahl.

Im folgenden untersuchen wir, wie sich die wichtigsten numerischen Ergebnisse des Abschnitts B 5 ändern, wenn die Olivin-Spinell-Umwandlung berücksichtigt wird. In Gleichung (49) ist dann anstelle des überadiabatischen Temperaturgradienten der

effektive Überadiabatische Temperaturgradient $\tau_f = \tau - \frac{\pi}{2} \frac{L^*}{D\alpha_r}$ zu setzen. Es zeigt sich, daß bei Beibehaltung der bisher verwendeten Material-Parameter und des Zell-Parameters $n=0,1$ Übereinstimmung mit dem an der Erdoberfläche beobachteten Wärmefluß in 700 km Tiefe eine Temperatur von etwa 1770 °C erfordert. Der zugehörige effektive Überadiabatische Temperaturgradient und die modifizierte Rayleigh-Zahl betragen $\tau_f = 1,63$ °C/km, bzw. $R=120\ 000$. Die zugehörigen Werte für die Amplituden der horizontalen Strömungsgeschwindigkeit sowie der Druck- und Temperatur-Variation, die sich aus den sinngemäß zu modifizierenden Gleichungen (45) bis (47) ergeben, sind

$$\begin{aligned} u_o &= 2,5 \text{ cm/Jahr} \\ p_o &= - 1300 \text{ bar} \\ T_o &= - 350 \text{ °C} \end{aligned}$$

Diese Werte unterscheiden sich nur unerheblich von den unter der Annahme eines homogenen Mantels errechneten Werten (vgl. S. 71). Die nunmehr bei gleichem Wärmefluß größere Horizontal-Geschwindigkeit geht in Richtung einer besseren Übereinstimmung mit den Ergebnissen der "Platten-Tektonik". Dennoch wird man angesichts der Unsicherheit, die den meisten der verwendeten Material-Parameter anhaftet, die Änderungen, die die Berücksichtigung der Olivin-Spinell-Umwandlung gebracht hat, nicht unbedingt als wesentlich bezeichnen können. Ähnliches wäre wohl auch durch eine zulässige Variation einiger Material-Parameter im homogenen Fall zu erreichen gewesen. Die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung der Olivin-Spinell-Umwandlung liegen sozusagen innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen überhaupt quantitative Aussagen gemacht werden können.

Wichtiger als der Einfluß der Olivin-Spinell-Umwandlung auf die Amplitude der Konvektionsströme dürfte ein anderer Aspekt dieser Umwandlung sein. Wir haben gesehen, daß die Übergangszone zwischen der Olivin- und der Spinell-Phase bei Konvek-

tion nicht in einer konstanten Tiefe liegt, sondern im absteigenden Konvektionsstrom angehoben und im aufsteigenden Konvektionsstrom abgesenkt ist (Abb. 16). Die Abweichungen von der statischen Gleichgewichtslage sollten etwa proportional der Temperatur-Variation (Gleichung 33) und damit auch der vertikalen Strömungsgeschwindigkeit sein. Aufgrund der experimentell bestimmten Steigung der Olivin-Spinell-Grenze von $54 \text{ bar}/^{\circ}\text{C}$ (ITO et al., 1971) ist zu erwarten, daß die Temperatur-Variation δT und die Variation der Tiefenlage δz^* miteinander gemäß

$$\delta z^* = \frac{\delta T}{7^{\circ}\text{C}} \text{ km}$$

verknüpft sind. Temperatur-Variationen der oben errechneten Größenordnung von 350°C sollten daher Undulationen der Übergangszone mit einer Amplitude von $\pm 50 \text{ km}$ bewirken. Im Prinzip sollte es möglich sein, derartige Undulationen mit seismologischen Methoden nachzuweisen. Die Olivin-Spinell-Umwandlungszone könnte gewissermaßen als seismischer Leithorizont dienen, mit Hilfe dessen die Gebiete auf- und absteigender Konvektionsströme kartiert und die zugehörigen Temperatur-Variationen quantitativ bestimmt werden könnten. Insbesondere könnte hierdurch auch entschieden werden, ob die vertikalen Strömungen im Erdmantel ähnlich den tektonischen Großstrukturen an der Erdoberfläche im Sinne der Platten-Tektonik auf relativ schmale Zonen konzentriert sind, oder ob sie, mehr im Sinne der hier diskutierten Konvektionstheorie, über größere Areale ausgedehnt sind.

Ein derartiger Nachweis setzt Methoden voraus, mit denen seismische Laufzeit-Daten ausgewertet werden können, wenn die Geschwindigkeiten der seismischen Wellen nicht nur mit der Tiefe, sondern auch in horizontaler Richtung variieren. Derartige Verfahren sind bisher für die Seismologie noch nicht entwickelt worden. Das klassische Herglotz-Wiechert-Verfahren zur Ermittlung der Geschwindigkeits-Verteilung, die zu einer gegebenen Laufzeitkurve gehört, ist nur anwendbar, wenn die Ge-

schwindigkeit allein eine Funktion der Tiefe ist; es unterliegt auch in diesem Fall noch einer Reihe einschränkender Bedingungen (s. z.B. BULLEN, 1963). Einige weitere Verfahren (BULLEN, 1960; McMECHAN und WIGGINS, 1972) beruhen ebenfalls auf der Annahme einer radialsymmetrisch geschichteten Erde.

Der Nachweis von Undulationen in der Olivin-Spinell-Grenze könnte mit Hilfe derartiger Verfahren höchstens dann gelingen, wenn diese Undulationen sehr langwellig sind und wenn Laufzeitkurven längs mehrerer Profile parallel zum Streichen der Konvektionsrollen vergleichend ausgewertet würden. Es gibt allerdings nur wenige Gebiete auf der Erde, die sich durch ihre Seismizität und ihre geotektonische Stellung für derartige Untersuchungen eignen würden.

Im allgemeinen wird man für einen Nachweis von Undulationen der Olivin-Spinell-Grenze, wie auch anderer geodynamisch signifikanter Strukturen im Erdinneren, darauf angewiesen sein, die Laufzeiten von seismischen Wellen auszuwerten, die sich nicht in Streichrichtung der Strukturen ausgebreitet haben. Im folgenden Kapitel wird ein Verfahren beschrieben, welches die Berechnung der Wege der seismischen Strahlen, der Laufzeitkurven und der strahlengeometrischen Amplituden ermöglicht, wenn die Geschwindigkeit der seismischen Wellen nicht nur mit der Tiefe, sondern auch in horizontaler Richtung längs des Wellenweges variiert. Anhand einiger theoretischer Beispiele wird untersucht werden, von welcher Größenordnung die laufzeit-seismischen Effekte sind, die aufgrund der vorhergesagten Undulationen der Olivin-Spinell-Grenze zu erwarten sind, und welche Genauigkeitsanforderungen an seismische Daten zu stellen sind, damit diese Effekte nachgewiesen werden können.

C. Strahlen-seismische Modell-Rechnungen für zweidimensional inhomogene Medien mit Anwendung auf die Übergangszone zwischen der Olivin- und der Spinell-Phase im Erdmantel

1. Grundprinzipien der Strahlen-Seismik

Seismische Messungen sind optimal interpretiert, wenn ein Modell des Untergrundes angegeben werden kann, welches die Meß-Daten, also die (meist an der Erdoberfläche gewonnenen) Seismogramme quantitativ erklärt. In der Praxis ist es weder möglich noch erforderlich, den gesamten Informationsgehalt der Seismogramme auszuschöpfen. In der Regel kann man sich mit Modellen zufriedengeben, durch die nur die wichtigsten Eigenschaften der Seismogramme erklärt werden. In vielen Fällen hat sich sogar gezeigt, daß man hinreichend zuverlässige Modelle des Untergrundes erhalten kann, wenn man nur die Ankunftszeiten der seismischen Signale an den Meßpunkten berücksichtigt und die Signal-Form selbst außer acht läßt. Man spricht dann von einer laufzeit-seismischen Interpretation.

Eine direkte Inversion von Laufzeit-Daten, d.h. die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung im Untergrund ausgehend von den Laufzeiten, ist nur in relativ einfachen Spezialfällen möglich - z.B. wenn der Untergrund aus einigen wenigen, durch Ebenen begrenzten Schichten mit jeweils konstanter Wellengeschwindigkeit aufgebaut ist oder wenn die Geschwindigkeit allein eine Funktion der Tiefe ist und mit der Tiefe monoton zunimmt. In komplizierteren Fällen, z.B. wenn sich, wie im Erdmantel aufgrund der Undulationen von Phasenübergangs-Zonen zu erwarten, die Geschwindigkeiten der seismischen Wellen kontinuierlich in horizontaler und vertikaler Richtung ändern, ist eine Auswertung nur mit Hilfe von Modell-Rechnungen möglich. Im Prinzip besteht eine solche Auswertung in einer iterativen Verbesserung eines Modells erster Näherung aufgrund des Vergleichs der für das Modell errechneten mit den gemessenen

Laufzeiten. Die Messungen gelten als laufzeit-seismisch interpretiert, wenn ein Modell gefunden ist, welches Laufzeiten liefert, die innerhalb der Meßgenauigkeit mit den gemessenen übereinstimmen. Inwiefern ein solches Modell eindeutig durch die an der Erdoberfläche meßbaren Laufzeiten bestimmt ist oder nicht, ist ein Problem für sich, welches hier nicht untersucht werden soll. (Hierzu kann auf die Ausführungen von KREY, 1971, verwiesen werden.)

Zunächst besteht noch eine vordringliche Aufgabe darin, geeignete Verfahren zu entwickeln, mit Hilfe derer die Laufzeiten seismischer Wellen für komplizierte Modelle des Untergrundes berechnet werden können. Im folgenden wird ein derartiges Verfahren beschrieben. Es ermöglicht die Konstruktion realistischer, zweidimensionaler Modelle des Untergrundes sowie die Berechnung der seismischen Strahlen und der Laufzeiten längs Profilen senkrecht zum Streichen der Strukturen; sofern die Variation der Geschwindigkeiten senkrecht zum Profil-Schnitt gering ist, läßt sich das Verfahren auch auf dreidimensionale Strukturen anwenden.

Die physikalischen Grundlagen strahlen-seismischer Modellrechnungen sind einfach; man benötigt nichts weiter als das Berechnungsgesetz. Wenn ein mathematisches Modell gefunden ist, welches jedem Punkt des Untergrundes in eindeutiger Weise eine Wellen-Geschwindigkeit zuordnet¹⁾, kann, ausgehend von einem bestimmten Abstrahlwinkel im Quellpunkt, der Strahlweg durch sukzessive Anwendung des Brechungsgesetzes schrittweise berechnet werden. Die Berechnung wird solange fortgeführt und parallel dazu die Laufzeit addiert, bis der Strahl die Erdoberfläche oder die Grenzen des Modells erreicht.

¹⁾ Hiermit haben wir implizit Isotropie der seismischen Geschwindigkeiten vorausgesetzt; diese Voraussetzung soll auch im folgenden beibehalten werden.

Da die Geschwindigkeiten seismischer Wellen im Erdinnern sowohl kontinuierlich, wie auch diskontinuierlich variieren können, ist es zweckmäßig, beide Arten der Variation bei der Konstruktion der Modelle zuzulassen. (Im Prinzip wäre es zwar möglich, kontinuierliche Übergänge durch eine Folge von Diskontinuitäten oder Diskontinuitäten durch Zonen mit großen Geschwindigkeitsgradienten zu approximieren; rechentechnisch erweist sich jedoch beides als unökonomisch.)

Im Falle von Diskontinuitäten wird die Änderung der Strahl-Richtung durch das Brechungsgesetz in der üblichen Form beschrieben. Sei i_1 der Winkel zwischen der Strahl-Richtung im Medium mit der Geschwindigkeit v_1 und dem im Durchstoßpunkt des Strahls errichteten Lot auf der Grenzfläche, so ergibt sich der entsprechende Winkel im Medium mit der Geschwindigkeit v_2 aus der Bedingung

$$(67) \quad \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

sofern $(v_2/v_1)\sin i_1 < 1$ ist. Andernfalls dringt der Strahl

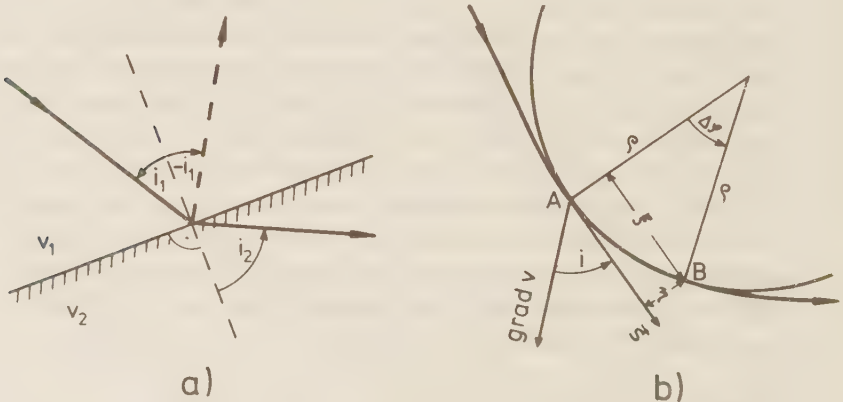


Abb. 17: Änderungen der Strahlrichtung bei diskontinuierlichen und kontinuierlichen Änderungen der Geschwindigkeiten seismischer Wellen: a) Brechung bzw. Reflexion an Diskontinuitäten, b) Krümmung bei kontinuierlichen Änderungen.

nicht ins Medium mit der Geschwindigkeit v_2 ein, sondern wird unter dem Winkel $i_2 = -i_1$ an der Grenzfläche reflektiert (vgl. Abb. 17a; - in diesem Kapitel werden zum Teil dieselben Symbole wie im Kapitel B mit unterschiedlicher Bedeutung verwendet, die Gefahr von Verwechslungen dürfte kaum bestehen). Im Falle kontinuierlicher Änderungen der Geschwindigkeiten wird der Strahl nicht gebrochen, sondern gekrümmt. Der Krümmungsradius (vgl. Abb. 17b) ergibt sich aus der Beziehung:

$$\rho = \frac{v}{|\text{grad} v| \sin i} \quad , \quad (68)$$

die man durch einen Grenzübergang aus dem Brechungsgesetz (67) erhalten kann. In Gleichung (68) ist i der Winkel zwischen dem Strahl-Vektor $\vec{s}$ (Einheits-Vektor in Richtung des Strahls) und dem Geschwindigkeits-Gradienten $\text{grad}(v)$. Der Krümmungsradius hat ein Vorzeichen; er ist positiv (negativ), wenn der Krümmungsmittelpunkt in Strahlrichtung gesehen links (rechts) liegt.

Im allgemeinen ist die Richtung und der Betrag des Geschwindigkeitsgradienten von Punkt zu Punkt verschieden. Für die praktische Berechnung des Strahlweges und der Laufzeit wird der Gradient stückweise als konstant angesehen. Solange der Gradient konstant ist, ist auch der Krümmungsradius konstant. Man kann daher von einem Punkt A des Strahls zu einem neuen Punkt B gelangen, indem man um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi$, bzw. um ein kleines Bogensegment $\rho\Delta\varphi$ längs des Krümmungskreises voranschreitet (vgl. Abb. 17b). Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, jeweils um ein konstantes Winkelinkrement (z.B. $\Delta\varphi=3^\circ$) voranzuschreiten; auf diese Art wird in Bereichen mit großem Geschwindigkeitsgradienten automatisch dichter gerechnet als in solchen mit kleinem Gradienten. Im einzelnen sind folgende Rechenoperationen auszuführen:

1. Im Punkt A wird $\text{grad}(v)$ bestimmt. Da wir voraussetzen wollen, daß die Geschwindigkeit als Funktion der Orts-Koordinaten bekannt sei, ist eine numerische Bestimmung

von $\text{grad}(v)$ an jedem Punkt durch Vergleich mit den Geschwindigkeiten an mindestens zwei Nachbarpunkten immer möglich. (Wie in einfacher Weise zweidimensionale Modelle des Untergrundes mathematisch formuliert werden können, wird unten beschrieben werden.)

2. Der Winkel i zwischen dem Strahl-Vektor und $\text{grad}(v)$ wird bestimmt. Anschließend kann aufgrund von Gleichung (68) der Krümmungsradius errechnet werden.

3. zum Punkt B gelangt man nun, indem man in Richtung des Strahl-Vektors in A um

$$(69) \quad \xi = \rho \sin \Delta\varphi$$

und senkrecht dazu um

$$(70) \quad \eta = \rho (1 - \cos \Delta\varphi)$$

voranschreitet. Positives η bedeutet eine Krümmung des Strahls nach links, negatives nach rechts. Das Vorzeichen von $\Delta\varphi$ ist gleich demjenigen von ρ zu wählen. ξ, η können als Koordinaten des Punktes B in einem am Punkte A zentrierten, strahlbezogenen Koordinatensystem, dessen Achsen in Strahlrichtung und in Richtung zum Krümmungs-Mittelpunkt zeigen, aufgefaßt werden. Die Umrechnung in die absoluten Koordinaten des Modelles - bei refraktionsseismischen Untersuchungen werden dies in der Regel kartesische Koordinaten, bei großräumigen seismologischen Untersuchungen dagegen Polarkoordinaten sein - erledigt sich durch eine einfache Koordinatentransformation.

4. Die Laufzeit bis zum Punkt B erhält man aus der Laufzeit bis zum Punkt A durch Addition von

$$(71) \quad \Delta t = \frac{1}{|\text{grad}v|} \left\{ \text{Arcth} \cos(i) - \text{Arcth} \cos(i + \Delta\varphi) \right\}$$

5. Durch Drehung des Strahl-Vektors um den Winkel $\Delta\varphi$ erhält man den neuen Strahl-Vektor am Punkt B.

Anschließend sind die Operationen am Punkt B und sukzessive an weiteren Punkten zu wiederholen, bis der Strahl die Erdoberfläche erreicht bzw. den Definitionsbereich des Modells verläßt.

Abweichend vom obigen Schema sind die Fälle $\text{grad}(v) = 0$ und $\sin(i) = 0$ zu behandeln. In diesen Fällen ist geradlinig in Richtung des Strahl-Vektors voranzuschreiten.

Darüber hinaus ist jeweils nach dem Rechenschritt 3 zu prüfen, ob auf dem Weg von A nach B Diskontinuitäten überschritten wurden. Gegebenenfalls ist durch einen Iterationsprozeß der Durchstoßpunkt des Strahls durch die Grenzfläche und das zugehörige Winkel-Inkrement $\Delta\varphi$ zu bestimmen, bevor nach 4. und 5. verfahren wird. Anschließend ist das Brechungsgesetz (Gl. 67), bzw. das Reflexionsgesetz anzuwenden, der neue Strahl-Vektor zu bestimmen und bei 1. fortzufahren.

Wegen der häufig wiederkehrenden, gleichartigen Operationen eignet sich das Verfahren der Strahl- und Laufzeit-Berechnung gut zur Programmierung für elektronische Rechenanlagen, ja sogar für einige Tischrechner. Die Beispiele im Abschnitt C 4 wurden auf einem Tischrechner vom Typ HP 9810 A berechnet.

Der Quellpunkt der seismischen Wellen erfordert gegenüber anderen Punkten keine gesonderte Behandlung; er kann daher an jede beliebige Stelle des Modells gelegt werden. Durch eine Laufanweisung für die Abstrahlwinkel der seismischen Strahlen im Quellpunkt ist es möglich, nicht nur die Laufwege und Laufzeiten einzelner Strahlen, sondern beliebiger Strahlen-Büschel berechnen bzw. zeichnen zu lassen.

Im Prinzip läßt sich das geschilderte Rechenverfahren auf jede zweidimensionale Geschwindigkeitsverteilung anwenden. Im folgenden Abschnitt wird eine Methode beschrieben, nach der in besonders einfacher und vielseitiger Weise Modellvorstellungen über die Geschwindigkeitsverteilung im Untergrund mathematisch formuliert werden können.

2. Konstruktion zweidimensionaler Modelle des Untergrundes

Das oben geschilderte Verfahren der Strahl- und Laufzeitberechnung setzt voraus, daß jedem Punkt des Untergrundes innerhalb der Modell-Grenzen in eindeutiger Weise ein Wert der Wellengeschwindigkeit $v(\vec{r})$, $\vec{r}$ = Ortsvektor, zugeordnet wird. Im Falle von Diskontinuitäten müssen sozusagen "der unteren und oberen Hälfte der Grenzfläche" verschiedene Werte zugeordnet werden.

Von der Problemstellung der Modell-Rechnung her ergeben sich an die Funktion $v(\vec{r})$ folgende Wünsche: $v(\vec{r})$ sollte derart aufgebaut sein, daß eine einfache und flexible Konstruktion von realistischen Modellen des Untergrundes möglich ist. Aus diesem Grund sollten die verwendeten Parameter eine möglichst anschauliche Bedeutung haben und leicht variiert werden können. Durch Veränderung oder Hinzufügung eines oder weniger Parameter unter Beibehaltung der übrigen sollten Modelle lokal verändert oder erweitert werden können; eine gezielte Veränderung eines Modells sollte also keine neue Berechnung oder neue Eingabe sämtlicher Modell-Parameter erforderlich machen. Schließlich sollte die Zahl der erforderlichen Modell-Parameter möglichst klein und der Kompliziertheit der zu modellierenden Strukturen angemessen sein. Diese Bedingung ist insbesondere dafür ausschlaggebend, ob die Berechnungen auf Tischrechnern geringer Speicherkapazität durchgeführt werden können, was gegebenenfalls wegen des direkten Zugangs sehr vorteilhaft ist.

Übliche Verfahren zur Darstellung willkürlicher Funktionen zweier Veränderlicher wie die Approximation oder Interpolation durch zweidimensionale Fourier-Reihen oder Polynome erfüllen verschiedene der oben genannten Bedingungen nicht. Zur Konstruktion realistischer Modelle wären Reihen hoher Ordnung erforderlich; die Entwicklungskoeffizienten wären unanschaulich und bei Veränderung oder Hinzufügung eines einzigen Geschwindigkeitswertes allesamt neu zu berechnen. Darüber hinaus würde das

oszillierende Verhalten dieser Funktionen zu unerwünschten Effekten in den Laufzeitkurven führen.

Es ist naheliegend, bei der Entwicklung zweidimensionaler Modelle von den Erfahrungen auszugehen, die bei der Behandlung des eindimensionalen Falls, d.h. im Falle horizontaler Schichtung, gewonnen wurden. Hierbei hat sich gezeigt, daß es praktisch immer mit hinreichender Genauigkeit möglich ist, eine gegebene Geschwindigkeits-Tiefen-Funktion $v(z)$ durch eine Folge von Schichten mit konstantem Geschwindigkeits-Gradienten zu approximieren, d.h. durch Funktionen der Form

$$\left. \begin{array}{l} V = V_i + \alpha_i (z - z_i) \\ \text{mit } \alpha_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{z_{i+1} - z_i} \end{array} \right\} \text{für } z_i < z \leq z_{i+1} \quad (72)$$

An den Schichtgrenzen z_i kann die Geschwindigkeit stetig oder unstetig sein.

Der Übergang zu zweidimensionalen Modellen kann nun einfach dadurch erfolgen, daß die Tiefen z_i der Schichtgrenzen nicht als Konstanten, sondern als Funktionen der horizontalen Koordinate eingeführt werden. Von den Dimensionen des Modells wird es abhängen, ob man kartesische Koordinaten oder geozentrische Polar-Koordinaten verwendet; im folgenden wird der Einfachheit halber eine zur z -Richtung senkrechte x -Achse verwendet. Die Darstellung der Geschwindigkeits-Funktion in der Form der Gleichung (72) kann unverändert beibehalten werden. Die zweidimensionale Geschwindigkeits-Verteilung wird also durch Linien gleicher Geschwindigkeiten (Isolinien) mit $z_i = z(x, v_i)$ definiert, zwischen denen in z -Richtung linear interpoliert wird. Es ist zu beachten, daß nunmehr der Geschwindigkeitsgradient $\text{grad}(v)$ neben der z -Komponente α_i im allgemeinen auch eine x -Komponente hat, und daß beide Komponenten auch innerhalb einer Schicht, d.h. zwischen zwei verschiedenen Isolinien, Funktionen von x sind;

die x-Komponente ist darüber hinaus eine Funktion von z. Es sei vermerkt, daß WILL (1975) ein Rechenprogramm ausgearbeitet hat, bei dem abweichend hiervon der Geschwindigkeitsgradient innerhalb der Schichten jeweils konstant ist. Dies hat den Vorteil, daß dann die Strahlen innerhalb jeder Schicht, wie im Falle horizontaler Schichtung, Kreisbögen sind, was den Gang der Rechnung vereinfacht und die Rechenzeit verringert. Es ist vor allem zur Modellierung sedimentärer Strukturen geeignet. Es bringt aber den Nachteil mit sich, daß sich an den Schichtgrenzen häufig unerwünschte Diskontinuitäten ergeben, die durch komplizierte Variationen des Modells unterdrückt werden müssen. Beim oben geschilderten Modell-Aufbau werden diese Komplikationen vermieden.

Es verbleibt festzulegen, wie die Isolinien der Geschwindigkeit modelliert werden sollen. Im Prinzip eignen sich verschiedene Funktionen als Aufbauelemente hierfür. Im Interesse der Eindeutigkeit ist lediglich dafür Sorge zu tragen, daß sich die Isolinien nicht innerhalb des Modells überschneiden. Als besonders flexibel und Speicherplatz-sparend hat sich ein Aufbau der Isolinien aus Arcustangens-Termen der Form

$$(73) \quad \Delta z_k \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{x - x_k}{b_k} \right)$$

erwiesen. Ein solcher Term beschreibt eine "Flexur" der Höhe Δz_k , die bei der x-Koordinaten x_k zentriert ist (vgl. Abb. 18). Mit zunehmender Entfernung von x_k geht der Wert von (73) links asymptotisch gegen 0 und rechts gegen Δz_k . Der Anstieg vollzieht sich größtenteils in einem begrenzten Bereich um x_k , dessen Breite durch den Parameter b_k bestimmt ist. Innerhalb eines Intervalles der Breite $2b_k$ symmetrisch zum Punkt x_k ändert sich der Wert von (73) gerade um $\Delta z_k/2$; $2b_k$ kann also als Halbwertsbreite der Flexur bezeichnet werden. Durch Kombination zweier Flexuren mit entsprechend angepaßten Parametern x_k , Δz_k , b_k können Syn- und Antiklinalen, Horste, Gräben und andere geologische Strukturen im Untergrund modelliert werden.

Durch Addition mehrerer Terme der Form (73) zu einer Normal-Tiefe z_{i0} kann gemäß

$$z_i = z(v_i) = z_{i0} + \sum_{k=1}^{n_i} \Delta z_{ik} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{x - x_{ik}}{b_{ik}} \right) \quad (74)$$

nahezu jede gewünschte Morphologie von Isolinen erzeugt werden. Der Index i in Gleichung (74) kennzeichnet die Nummer

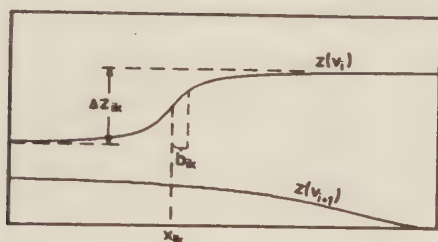


Abb. 18: Zur Konstruktion von Isolinen aus Arcustangens-Termen.

der Isolinie, der Index k die Nummer der Flexur; Δz_{ik} ist also die Höhe der k -ten Flexur der i -ten Isolinie. Die Abbildung 17 enthält zwei Isolinen mit je einer Flexur.

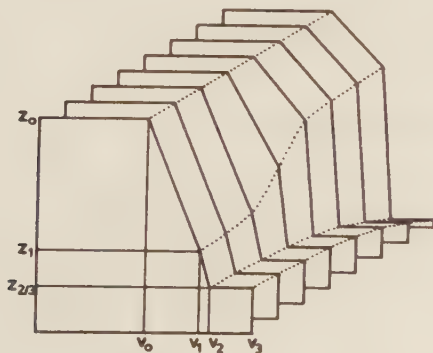


Abb. 19: Blockdiagramm einer zweidimensionalen Geschwindigkeitsverteilung, die durch Interpolation nach Gl. 72 aus den Linien gleicher Geschwindigkeit in Abb. 18 erhalten werden kann.

Durch die Gleichungen (72) und (74) ist eindeutig eine zweidimensionale Geschwindigkeits-Verteilung bestimmt. Die Abbildung 19 zeigt ein einfaches Beispiel in Form eines Blockdiagramms. Dieses Modell erhält man, wenn man den Isolinien der Abb. 18 die Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 und der Oberfläche die Geschwindigkeit v_0 zuordnet. Die Oberfläche kann wie eine Isolinie behandelt, also auch mit einer Topographie versehen werden. Die untere Isolinie wurde in diesem Beispiel durch die Zuweisung von zwei Geschwindigkeiten als Diskontinuität behandelt; unterhalb der tiefsten Isolinie wird die Geschwindigkeit vom Rechenprogramm automatisch konstant gesetzt.

Ganz analog können zweidimensionale Modelle in geozentrischen Polar-Koordinaten konstruiert werden, indem, bei positiver Zählung von z nach oben, in den Gleichungen (72) und (74) z durch $R_0 + z$ und x durch $R_0 \vartheta$ ersetzt wird, wobei R_0 der mittlere Erdradius und ϑ die Poldistanz ist. (Es ist dies natürlich im allgemeinen nicht die Poldistanz im System der geographischen Koordinaten, sondern in einem System ebener Polar-Koordinaten im Hauptschnitt, der das Epizentrum und die Meßpunkte enthält.) Werden keine Flexuren eingebaut, so erhält man in diesem Fall sphärisch geschichtete Erdmodelle. Zur Veranschaulichung kann die Abbildung 20 dienen. Sie zeigt das Ergebnis der Rechnungen für ein stark vereinfachtes Erdmodell, das auf den Geschwindigkeits-Tiefen-Funktionen für Longitudinal-Wellen von GUTENBERG und JEFFREYS (nach PRESS, 1966) beruht.

3. Strahlen-geometrische Amplituden

Im Rahmen der Strahlenseismik (im hier verwendeten Sinne des Begriffs) bleibt der Wellencharakter der seismischen Signale unberücksichtigt. Über die Signal-Form kann daher keine und über die Amplituden der Signale nur insoweit eine Aussage gemacht werden, als sie durch die Geometrie des Ausbreitungsvorgangs bestimmt werden. Nimmt man an, daß die Energie, die im Quellpunkt unter einem bestimmten Raumwinkel abgestrahlt wird,

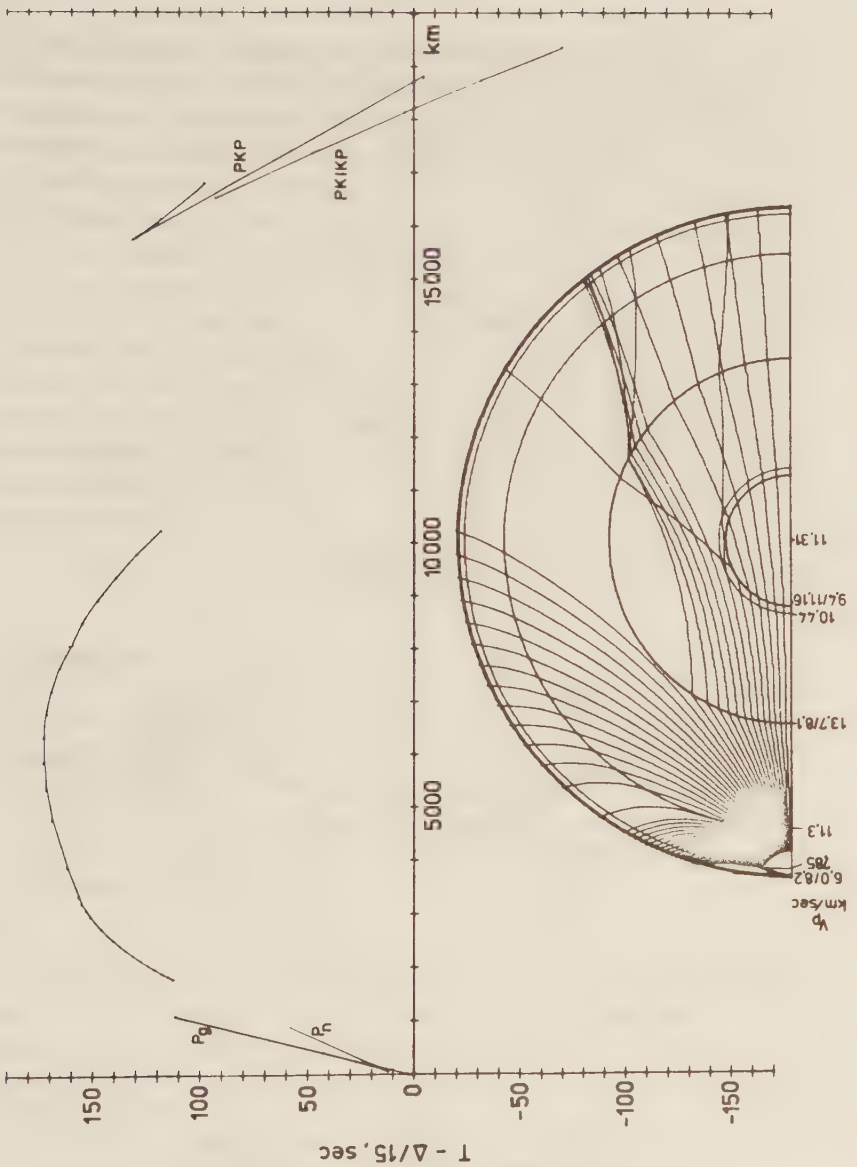


Abb. 20: Stark vereinfachtes, sphärisch geschichtetes Erdmodell zur Demonstration der Modell-Rechnung. Zwischen den am rechten Bildrand angegebenen Geschwindigkeiten wird in radialer Richtung linear interpoliert. Diskontinuitäten sind durch Angabe beider Geschwindigkeiten gekennzeichnet. Laufzeit-Reduktion mit 15 km/sec.

innerhalb der Strahlen, die ihn einschließen, während des Ausbreitungsvorgangs erhalten bleibt, so kann man die strahlen-geometrische Amplituden-Verteilung quantitativ bestimmen (Abb. 21). Insbesondere werden hierbei Energieverluste durch Wechselwellen, Absorption und Streuung vernachlässigt. Die strahlen-geometrisch errechneten Amplituden werden daher in der Regel mit zunehmender Entfernung weniger abnehmen als die wahren Amplituden. Eine weitere systematische Abweichung besteht in der zu großen Schwankung strahlen-geometrisch errechneter Amplituden-Kurven. Dies beruht darauf, daß der bei der realen Wellenausbreitung innerhalb der Wellenfront stattfindende Energie-Ausgleich (Beugung) unberücksichtigt bleibt. Solange es keine Methoden für eine strenge Berechnung der Amplituden seismischer Wellen in zweidimensional inhomogenen Medien gibt, mag es nützlich sein, sich an den strahlen-geometrisch errechneten zu orientieren.

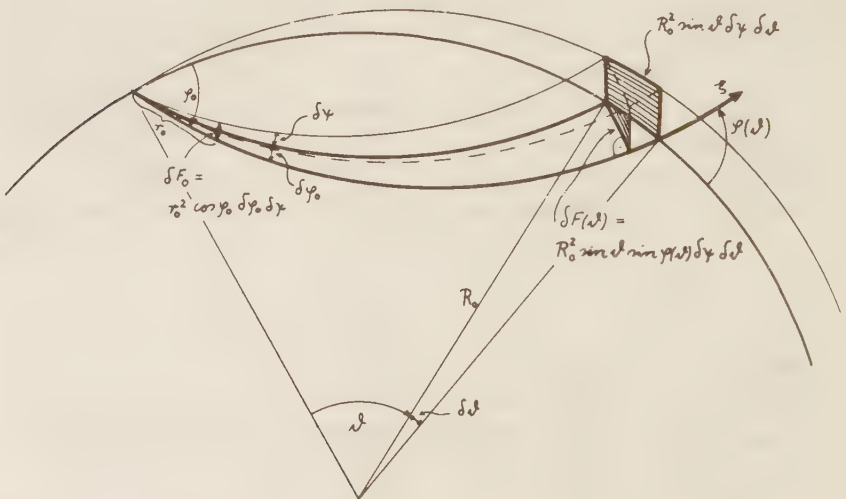


Abb. 21: Zur Ableitung der strahlen-geometrischen Amplituden (Gl. 75). Es wird vorausgesetzt, daß die Energie, die unter einem gegebenen Raumwinkel abgestrahlt wird, zwischen den Strahlen, die diesen Raumwinkel begrenzen, beim Ausbreitungsvorgang erhalten bleibt.

Da die Energiedichte seismischer Wellen proportional dem Wellenwiderstand ρv (ρ ist hier wieder die Dichte) und dem Quadrat der Amplitude A der Welle ist, ergibt sich aus der Bedingung der Energie-Erhaltung innerhalb des in Abbildung 21 skizzierten Strahlen-Büschels mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$$A_0^2 \rho_0 v_0 \delta F_0 = A^2(\vartheta) \rho(\vartheta) v(\vartheta) \delta F(\vartheta) .$$

A_0 ist die im Abstand r_0 nahe dem Quellpunkt unter dem Winkel φ_0 abgestrahlte und $A(\vartheta)$ die in der Auftauch-Entfernung zu erwartende Amplitude der Longitudinalwelle (auf diese wollen wir uns hier beschränken). Aufgrund einfacher geometrischer Beziehungen für die Fläche der eingeschossenen Wellenfront in der Entfernung r_0 vom Quellpunkt und in der Auftauch-Entfernung ergibt sich

$$A(\vartheta) = A_0 \frac{r_0}{R_0} \sqrt{\frac{\rho_0 v_0 \cos \varphi_0 \delta \varphi_0}{\rho(\vartheta) v(\vartheta) \sin \vartheta \sin \varphi(\vartheta) \delta \vartheta}} \quad (75)$$

Die Amplitude der Bewegung der Erdoberfläche ist im allgemeinen nicht gleich der Amplitude der von unten einfallenden Longitudinal-Welle, sondern hängt daneben noch in komplizierter Weise vom Auftauchwinkel und dem Verhältnis der Geschwindigkeiten von P- und S-Welle ab (s. z.B. WHITE, 1965). Für die Vertikal-Komponente der Bodenbewegung kann jedoch bei den in der Seismologie üblichen großen Auftauchwinkeln mit hinreichender Genauigkeit (Fehler $< 5\%$)

$$A_z = 2A \sin \varphi$$

geschrieben werden. In der Regel wird man die Amplitude des abgestrahlten Signals nicht kennen, so daß es zweckmäßig ist, relative Amplituden zu berechnen, die auf eine Standard-Entfernung ϑ^* bezogen werden. Für die relativen Amplituden der Vertikalkomponente erhält man dann

$$\frac{A_z(\vartheta)}{A_z(\vartheta^*)} = \sqrt{\frac{\rho(\vartheta^*) v(\vartheta^*) \sin \vartheta^* \left(\frac{\delta \vartheta^*}{\delta \varphi_0}\right)^* \cos \varphi_0 \sin \varphi(\vartheta^*)}{\rho(\vartheta) v(\vartheta) \sin \vartheta \frac{\delta \vartheta}{\delta \varphi_0} \cos \varphi^* \sin \varphi(\vartheta)}} \quad (76)$$

Im Rahmen der strahlen-geometrischen Näherung ist es ausreichend, die Dichte über einen einfachen linearen Zusammenhang $\rho = a + bv$ mit empirischen Konstanten a, b (etwa nach BIRCH, 1961) mit der Geschwindigkeit der P-Wellen zu verknüpfen. Nachdem für zwei benachbarte Strahlen die Normierungsfaktoren in einer Standard-Entfernung bestimmt sind, kann die relative Amplitude für je zwei weitere Strahlen nach Gleichung (76) errechnet werden. Als Voraussetzung für sinnvolle Ergebnisse muß die Differenz der Abstrahlwinkel $\delta\varphi$ hinreichend klein gewählt werden, damit die Auftauch-Entfernungen nicht zu unterschiedlich sind.

4. Über die Möglichkeit eines laufzeit-seismischen Nachweises von Undulationen der Olivin-Spinell-Übergangszone

Aufgrund der Ausführungen im Abschnitt B 7 ist zu erwarten, daß die Übergangszone von der Olivin- zur Spinell-Phase im Erdmantel Undulationen mit Amplituden der Größenordnung ± 50 km aufweist. Die Übergangszone sollte höher im Bereich absteigender und tiefer im Bereich aufsteigender Konvektionsströme liegen. Daneben ist in den Bereichen mit vertikaler Strömung eine Verdickung der Übergangszone zu erwarten (vgl. Abb. 16). Einige Beobachtungen deuten darauf hin, daß die Vertikal-Strömungen im Konvektionssystem auf relativ schmale Zonen konzentriert sind, was im Rahmen der im Kapitel B entwickelten Näherungslösung nicht voll beschrieben werden konnte. In diesem Fall wäre sogar mit größeren Undulationen der Olivin-Spinell-Übergangszone zu rechnen, da zur Wahrung des konvektiven Wärmeflusses größere vertikale Strömungsgeschwindigkeiten und größere horizontale Temperaturdifferenzen erforderlich wären.

Auf die prinzipielle Möglichkeit eines Nachweises thermischer Konvektion im Erdmantel durch die Untersuchung der Struktur der Olivin-Spinell-Übergangszone mit seismischen Methoden ist bereits früher hingewiesen worden (GEBRANDE, 1966; RICHTER, 1973). Mit dem hier beschriebenen Verfahren der Modell-Rechnung ist es



Abb. 22: Ergebnis der Modell-Rechnung für ein sphärisch geschichtetes Modell des Erdmantels aufgrund einer (geringfügig vereinfachten) Geschwindigkeits-Tiefen-Funktion nach JOHNSON (1969).

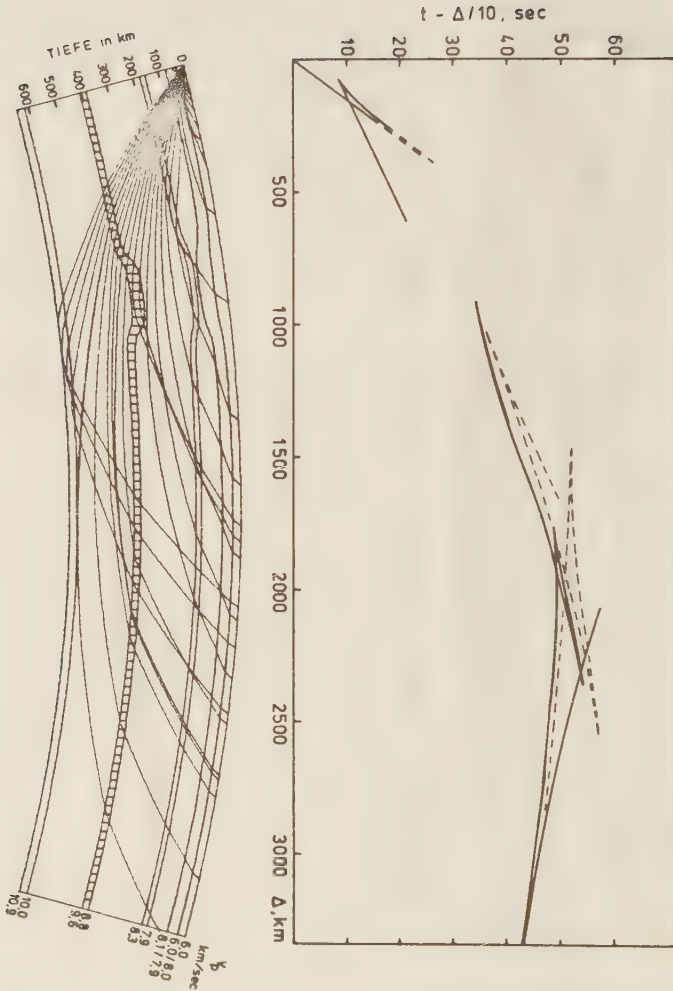


Abb. 23: Modell-Rechnung für die gleiche Geschwindigkeits-Tiefen-Funktion wie in Abb. 22, aber mit einer Aufwölbung der Olivin-Spinell-Übergangszone (schraffierter Bereich) und mit einer Ausdünnung der Gutenberg-Zone erniedrigter Geschwindigkeit. Die zugehörige Laufzeitkurve ist als durchgezogene Kurve, die Laufzeitkurve des sphärisch geschichteten Modells von Abb. 22 als gestrichelte Kurve eingetragen.

möglich, die zu erwartenden laufzeit-seismischen Effekte quantitativ zu untersuchen und später gegebenenfalls anhand von Beobachtungen nachzuprüfen. Wir begnügen uns hier mit der Demonstration einiger weniger theoretischer Beispiele.

Die Abbildung 22 enthält die Darstellung der Strahlen und Laufzeitkurven für ein sphärisch geschichtetes Modell des Erdmantels aufgrund der (hier etwas vereinfachten) Geschwindigkeits-Verteilung von JOHNSON (1969), die in Abbildung 3 wiedergegeben ist. Die Laufzeiten sind, wie auch in den Abbildungen 23 und 24, mit einer Geschwindigkeit von 10 km/sec reduziert. Die Olivin-Spinell-Umwandlung äußert sich durch eine Schleife in der Laufzeitkurve zwischen etwa 1500 km und 2500 km Epizentral-Entfernung. Die Kurve der Ersteinträge weist bei etwa 1950 km einen Knick auf. Eine weitere Schleife in der Laufzeitkurve zwischen etwa 2000 km und 3400 km ist der post-Spinell-Umwandlung, also vermutlich der Disproportionierung in Oxyde zuzuschreiben.

Im Modell der Abbildung 23 ist im Unterschied zur Abbildung 22 die Olivin-Spinell-Zone in einer etwa 300 km breiten Zone um etwa 75 km angehoben und die Gutenberg-Zone geringerer Geschwindigkeit ausgedünnt worden. Es wurden also Verhältnisse modelliert, wie man sie in einer Subduktionszone erwarten darf. Die zugehörige Laufzeitkurve für einen günstig gelegenen Bebenherd ist als durchgezogene Linie gezeichnet. Gestrichelt sind die wichtigsten Laufzeitkurven-Segmente des sphärisch geschichteten Modells von Abb. 22 eingezeichnet. Es fällt auf, daß durch die Aufwölbung der Phasengrenze die zugehörige Schleife in der Laufzeitkurve stark deformiert wird und daß die Ersteinträge im Bereich des Knickpunkts bei etwa 2000 km Epizentral-Entfernung um etwa 2 sec verfrüht eintreffen. Die Entfernung des Knick-Punkts hat sich praktisch nicht geändert.

In einem zweiten Beispiel, Abbildung 24, wurden in der linken Hälfte des Modells eine Anhebung um 25 km und zugleich eine

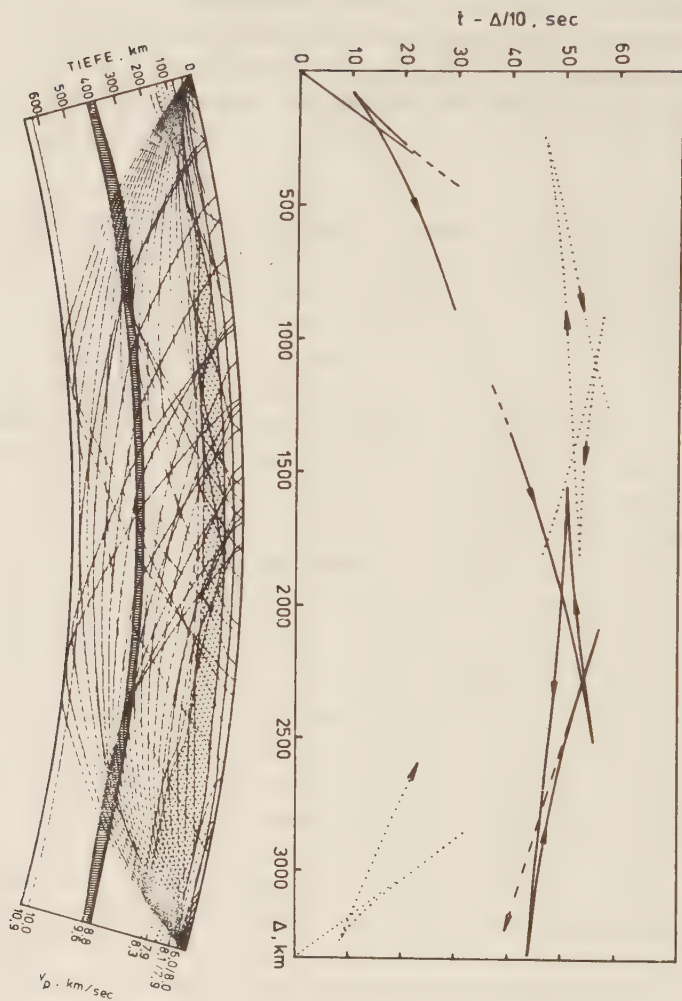


Abb. 24: Strahlen- und Laufzeit-Berechnung für "Schuß-" und "Gegenschuß" für ein Modell mit Undulationen der Olivin-Spinell-Zone (schraffiert) und mit Variationen in der Mächtigkeit der Gutenberg-Zone (punktiert). Für einen Nachweis der Undulationen der Olivin-Spinell-Zone wären die beiden "Schußpunkte" wenig geeignet, da in den Bereichen der Aufwölbung bzw. Absenkung keine Scheitelpunkte von Strahlen liegen.

Verdickung der Olivin-Spinell-Zone auf 50 km sowie ein Ausdünnen der Gutenberg-Zone und antisymmetrisch in der rechten Hälfte eine Absenkung der Phasenübergangszone und eine Verdickung der Gutenberg-Zone modelliert. Dieses Modell entspricht also etwa dem Bild, das wir bei einem Querschnitt durch eine Konvektions-Walze zu erwarten hätten. Es wurden die Strahlen und Laufzeitkurven für zwei fiktive oberflächennahe Beben am rechten und linken Rand des Modells errechnet. Die durchgezogene Laufzeitkurve gehört zum linken, die punktierte zum rechten Beben. Beide stimmen dem Typ nach mit der Laufzeitkurve der Abbildung 22 überein und unterscheiden sich untereinander in gleicher Epizentral-Entfernung maximal um etwa 2 sec. Diese Laufzeitdifferenz beruht vorwiegend auf der Variation der Mächtigkeit der Gutenberg-Zone. Für einen Nachweis der Undulation der Olivin-Spinell-Zone wären die beiden Beben aufgrund ihrer Lage wenig geeignet, da in den Bereichen der Aufwölbung bzw. Absenkung keine Scheitelpunkte liegen.

Aus diesen beiden Beispielen ist bereits ersichtlich, daß der Nachweis von Undulationen der Olivin-Spinell-Grenze mit dem weltweiten Netz seismischer Stationen alleine kaum wird geführt werden können. Weder die standardmäßige Genauigkeit der Bestimmung der Herdparameter (Epizentrum, Hypozentrum, Null-Zeit), noch die Zahl der unter einem bestimmten Azimut verfügbaren Stationen scheint für diese Aufgabe hinreichend. Es sei daran erinnert, daß routinemäßige Epizentrums-Bestimmungen selten genauer als 10 bis 20 km und Hypozentrums-Bestimmungen in der Regel noch unsicherer sind. Gerade in geodynamisch interessanten Gebieten können die Fehler weit größer werden, wie das Beispiel der Kernsprengung LONGSHOT auf der Aleuten-Insel Amchitka zeigt. Diese wurde bei der Routine-Auswertung in einer Tiefe von 76 km und mit einem Epizentrum 26 km vom wahren Sprengpunkt entfernt lokalisiert (ROTHER, 1969).

Dennoch braucht man nicht pessimistisch zu sein, wenn gezielte regionale Untersuchungen ins Auge gefaßt werden. Durch die

Errichtung zusätzlicher temporärer Stationsnetze in bestimmten Herdgebieten sollte - gerade auch in Verbindung mit Verfahren der Modellrechnung - eine weit zuverlässigere Bestimmung der Herd-Daten möglich sein. Wenn man darüber hinaus das vorhandene Stationsnetz durch profilmäßig angeordnete mobile Stationen im Entfernungsbereich von 1500 km bis etwa 2500 km ergänzt, so daß Laufzeitkurven individuell für jedes einzelne Beben aufgenommen und analysiert werden können, müßte ein Nachweis von Effekten der geschilderten Art durchaus möglich sein. Besonders geeignet für diesen Zweck scheinen Tiefen-Beben wegen ihrer relativ hochfrequenten Signale und weil ihr Hypozentrum mit Hilfe der Laufzeit-Differenz zwischen der pP- und P-Phase in der Regel zuverlässiger bestimmt werden kann, als dasjenige oberflächennaher Beben. Noch erfolgsversprechender wären freilich seismische Experimente, bei denen die Herd-Daten von vornherein genau bekannt sind, also Profil-Vermessungen bei Kernsprengungen und eventuell auch mit Hilfe von 10 to-Sprengungen im Meer.

Das Verfahren der Modell-Rechnung kann nicht nur zur Interpretation kompletter Laufzeitkurven, sondern auch zur Deutung lokaler Laufzeit-Anomalien herangezogen werden. In Abbildung 25 sind Laufzeiten und Strahlen zwischen einem Bebenherd (bzw. einer seismischen Station) an der Erdoberfläche und einer Tiefe von 800 km dargestellt. Das Modell basiert wie die bisherigen auf der Geschwindigkeits-Verteilung für P-Wellen von JOHNSON (1969), enthält aber zusätzlich laterale Variationen der Geschwindigkeiten, wie sie in Subduktionszonen zu vermuten sind (s. z.B. GRIGGS, 1972). Die Gutenberg-Zone ist fast unterbrochen, die Olivin-Spinell-Übergangszone ist etwa um 75 km angehoben und zugleich verdickt und die post-Spinell-Übergangszone ist etwa 40 km abgesenkt. Die Abbildung 26 ist eine andere Darstellung des Modells. Die zweidimensionale Geschwindigkeits-Verteilung ist hier durch Geschwindigkeits-Tiefen-Funktionen im x-Abstand von jeweils 50 km repräsentiert, die perspektivisch hintereinander angeordnet sind. Das Modell in Abbildung 27 ist nach einer

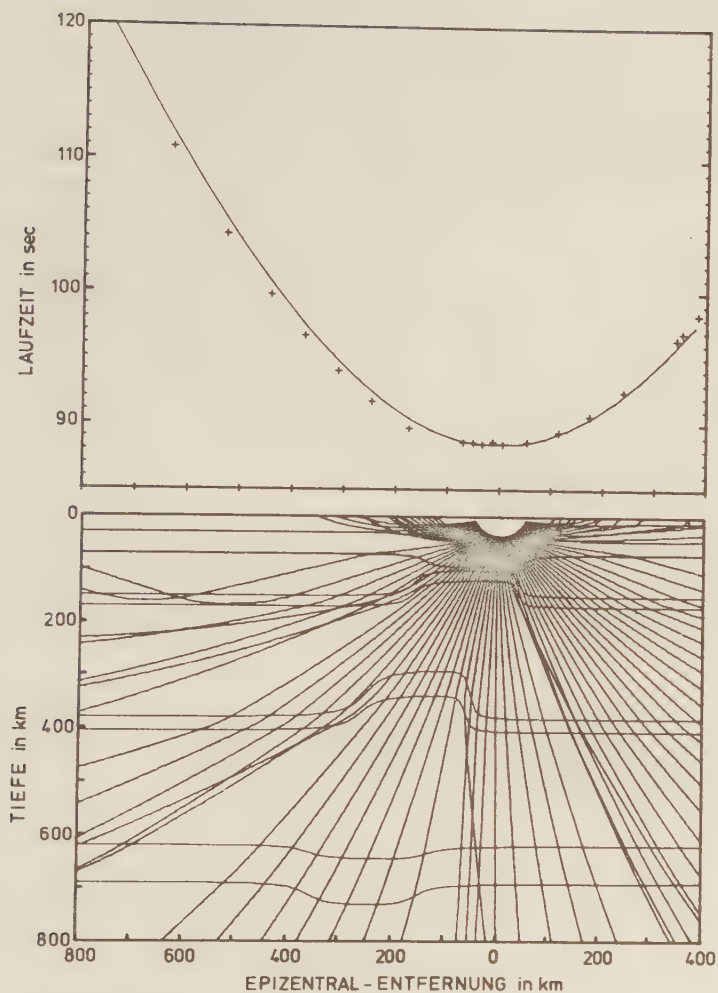


Abb. 25: Beispiel für die Berechnung von Laufzeit-Anomalien für ein Beben bzw. eine Erdbebenstation über einer Subduktionszone. Die Kreuze geben die Laufzeiten zwischen der Oberfläche und 800 km Tiefe längs der dargestellten Strahlen an. Die durchgezogene Kurve ist die Laufzeitkurve für ein Vergleichs-Modell ohne horizontale Geschwindigkeits-Variationen. Die Abbildung 26 zeigt das Modell als Block-Diagramm..

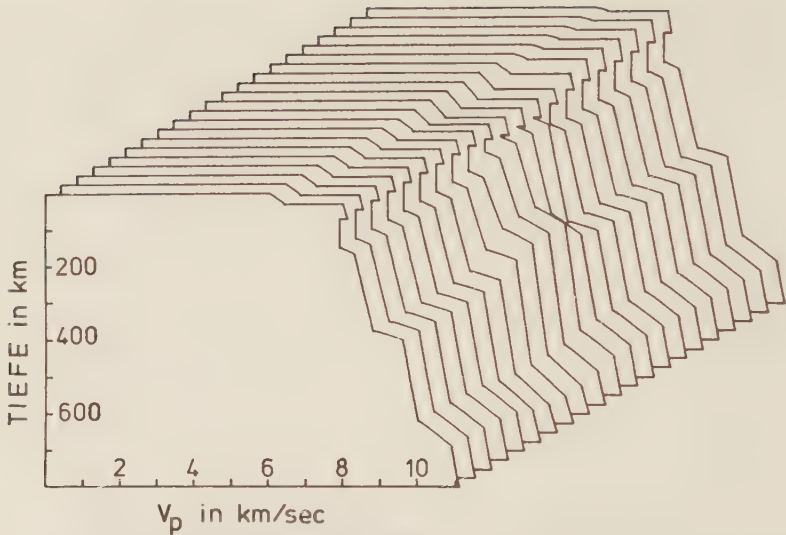


Abb. 26: Block-Diagramm eines Modells mit Subduktionszone im Sinne der Platten-Tektonik; gleiches Modell wie in Abb. 25.

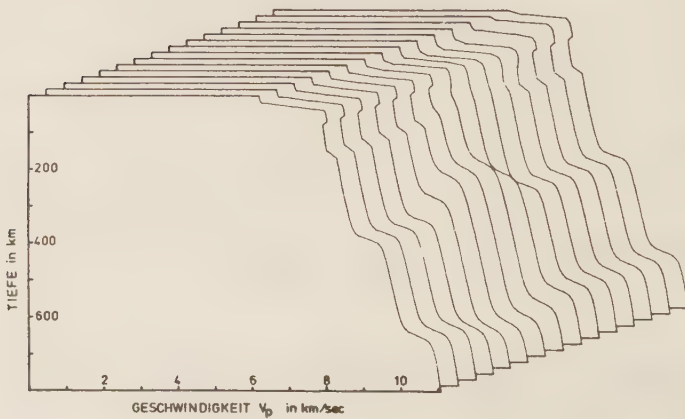


Abb. 27: Darstellung eines laufzeit-seismisch nahezu äquivalenten Modells zur Abb. 26 nach einer unterschiedlichen Modell-Version. Hier wird auch die Variation der Geschwindigkeiten in vertikaler Richtung durch Arcustangens-Terme dargestellt.

von der obigen Beschreibung abweichenden Programm-Version konstruiert, bei der auch die Variation der Geschwindigkeit mit der Tiefe durch Arcustangens-Terme dargestellt wird. Hierdurch ist bei praktisch gleichem Speicherplatz-Bedarf eine noch genauere Wiedergabe der Geschwindigkeits-Verteilung von JOHNSON (1969), vgl. Abb. 3, möglich. Laufzeitseismisch sind die Modelle in den Abbildungen 26 und 27 praktisch äquivalent.

Die Kreuze in Abbildung 25 geben die Laufzeiten längs der Strahlen zwischen dem Quellpunkt (bzw. der Station) und 800 km Tiefe wieder. Die durchgezogene Kurve ist die entsprechende Laufzeitkurve für dieselbe Geschwindigkeits-Tiefen-Funktion ohne laterale Änderungen. Die Unterschiede sind erstaunlich gering; sie betragen maximal etwa 1 sec. Tatsächlich werden oft viel größere Laufzeitanomalien beobachtet, was offensichtlich noch stärkere Inhomogenitäten im Erdmantel als die hier modellierten voraussetzt. Abschließend sei darauf hingewiesen, daß nicht nur durch horizontal gelagerte Schichten erniedrigter Geschwindigkeit, sondern auch durch laterale Inhomogenitäten Schattenzonen erzeugt werden können, wie dies am Bild der Strahlen in Abbildung 23 zu erkennen ist. Auch dieser Effekt könnte zum Nachweis geodynamisch signifikanter Strukturen im Erdmantel herangezogen werden.

D. Zusammenfassung

Geotektonische Vorgänge werden mit großer Wahrscheinlichkeit durch thermische Konvektionsströme im Erdmantel angetrieben. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, auf theoretischem Wege zu einem besseren Verständnis dieser Vorgänge beizutragen.

Selbst wenn thermische Konvektion nicht die primäre Antriebsursache wäre, müßte sie doch auch in jeder anderen Theorie berücksichtigt werden, da nach unseren derzeitigen Kenntnissen über die Zusammensetzung und die physikalischen Eigenschaften des Erdmantels, der Wärmefluß an den Ozeanböden nur zu etwa einem Drittel durch Wärmeleitung erklärt werden kann. Die restlichen zwei Drittel müssen konvektiv transportiert werden.

Die Theorie thermischer Konvektion wird in der vorliegenden Arbeit nicht auf der üblichen Basis der Boussinesq-Approximation, sondern unter allgemeineren Voraussetzungen entwickelt. Insbesondere werden in der Wärmeleitungsgleichung die Kompressibilität und die Wärmeproduktion durch innere Reibung näherungsweise berücksichtigt. Dank dieser allgemeineren Voraussetzungen kann eine Beziehung für den mechanischen Wirkungsgrad thermischer Konvektion angegeben werden (Gleichung 29), die unabhängig von der Rheologie des Erdmantels ist. Es zeigt sich, daß Konvektion infolge von Erwärmung durch innere Wärmequellen (z.B. radiogene Wärme) als Antriebsmechanismus nur halb so effektiv ist, als wenn dem konvektierenden Medium alle Wärme von unten zugeführt wird. Aus einer quantitativen Anwendung der gefundenen Beziehung auf den Erdmantel muß gefolgert werden, daß mit großer Wahrscheinlichkeit (im Rahmen unserer derzeitigen Kenntnis verschiedener Material-Parameter) das Konvektionssystem im Erdmantel nicht auf Lithosphäre und Asthenosphäre begrenzt ist, aber auch nicht bis zum Erdkern hinabreicht. Eine Eindringtiefe von 700 km, die aufgrund der Tiefen-Verteilung der Erdbeben wahrscheinlich ist, scheint auch aufgrund des Wirkungsgrades möglich.

Die entscheidende Schwierigkeit bei der theoretischen Behandlung thermischer Konvektion liegt in der Nicht-Linearität der Wärmeleitungsgleichung für bewegte Medien. Die nicht-linearen Glieder, insbesondere das entscheidende konvektive Glied, können nicht vernachlässigt werden, da sonst auch jede Information über die Dynamik der Konvektion verlorengeht. Es ist dann nur noch eine Aussage darüber möglich, ob bei gegebenen Randbedingungen und Material-Parametern Konvektion überhaupt stattfindet, aber nicht, mit welcher Amplitude sie abläuft, d.h. wie groß die Strömungsgeschwindigkeiten, die Spannungen, der Wärmefluß etc. sind. Eine quantitative Anwendung auf geodynamische Fragestellungen setzt also notwendigerweise eine Berücksichtigung nicht-linearer Terme in der Wärmeleitungsgleichung voraus. In strenger Weise ist dies auf analytischem Wege nicht möglich. Im Abschnitt B 5 der vorliegenden Arbeit wird eine zweidimensionale, stationäre Näherungslösung unter Berücksichtigung des konvektiven Gliedes und der Energiedissipation abgeleitet, die auf folgendem Grundgedanken beruht: Es wird nicht verlangt, daß die Wärmeleitungsgleichung an jeder Stelle exakt erfüllt wird, sondern man begnügt sich damit, wenn sie in jeder Tiefe z nach Mittelung in der Horizontalen (x -Richtung) und an jeder x -Koordinaten nach Mittelung in der Vertikalen (z -Richtung) erfüllt werden kann. Man hat den Eindruck, daß eine Lösung, die diesen Forderungen genügt, sich nicht allzusehr von einer strengen Lösung unterscheiden kann, sofern sie andererseits auch die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichungen und die Randbedingungen erfüllt. Dies trifft für die durch die Gleichungen (30) bis (33) und (44) bis (48) beschriebene Lösung zu, die übrigens trotz der allgemeineren Voraussetzungen weitgehend mit einer von MALKUS und VERONIS (1958) auf der Basis der Boussinesq-Approximation und auf anderem Wege abgeleiteten Lösung übereinstimmt. Insbesondere erweist sich die Berücksichtigung der Energiedissipation im Rahmen der hier verwendeten Näherung als überflüssig, da sie in die Lösung nicht eingeht.

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit, wie auch die Druck- und Temperatur-Variation sind bei der hier behandelten Näherungslösung harmonische Funktionen der Horizontal- und Vertikal-Koordinaten; (sie können als erste Glieder einer zweidimensionalen Fourier-Entwicklung einer strengeren Lösung aufgefaßt werden.) Es wird hierdurch Konvektion in Form langgestreckter Konvektions-Walzen beschrieben. Der Durchmesser dieser Konvektions-Walzen in horizontaler Richtung (bzw. die Wellenlänge) bleibt im Rahmen unserer Näherungslösung im allgemeinen zunächst unbestimmt. Nur im Spezialfall gerade einsetzender Konvektion, d.h. im Minimum der kritischen Rayleigh-Zahl (Abb. 8), ist er eindeutig festgelegt und zwar gleich $\sqrt{2D}$. Bei überkritischer Rayleigh-Zahl ist der horizontale Durchmesser der Konvektions-Walzen nur innerhalb eines gewissen Intervalles festgelegt, welches mit zunehmender Rayleigh-Zahl breiter wird. Wenn über die Materialkonstanten des Mediums, die Schichtdicke D und die Temperaturen an den Schichtgrenzen hinaus auch der Wärmefluß an der Oberfläche vorgegeben ist, ist jedoch auch der Durchmesser der Konvektions-Walzen in horizontaler Richtung festgelegt. Wenn die Untergrenze der Konvektionsströme im Erdmantel in 700 km Tiefe angenommen, die Temperatur dort innerhalb plausibler Grenzen vorgegeben wird (1500 bis 2000 °C) und für die verschiedenen Material-Parameter die üblichen Werte angesetzt werden, folgt aus dem beobachteten Wärmefluß, daß die Konvektions-Walzen im Erdmantel etwa 10 mal so breit wie dick, d.h. rund 7000 km breit sein müssen. Ganz unabhängig hiervon werden Walzen-Durchmesser dieser Größenordnung zur Erklärung der relativen Abstände der Großstrukturen an der Erdoberfläche benötigt. Die physikalische Ursache für die Entstehung stark abgeplatteter Konvektions-Walzen im Erdmantel liegt vermutlich im unterschiedlichen rheologischen Verhalten von Lithosphäre und Asthenosphäre begründet.

Mit Hinweis auf Labor-Experimente und theoretische Untersuchungen unter stark idealisierten Bedingungen ist von verschiedenen Autoren postuliert worden, daß die horizontalen Durchmesser der Kon-

vektions-Walzen im Erdmantel von der Größenordnung der Schichtdicke sein sollten. Diese Prämisse scheint für den relativen Mißerfolg einiger früherer Arbeiten verantwortlich zu sein. Sie ist umso weniger gerechtfertigt, als auch in Flüssigkeiten mit konstanten Material-Parametern im Labor-Experiment eine Zunahme der Durchmesser der Konvektions-Walzen mit zunehmender Rayleigh-Zahl beobachtet wird, die bisher von keiner Theorie auch nur qualitativ beschrieben wird. Daraus erwächst unter anderem eine Diskrepanz zwischen theoretisch berechneten und im Labor-Experiment gemessenem Wärmefluß, die behoben werden kann, wenn in der Theorie der Durchmesser der Konvektions-Walzen dem experimentell beobachteten Durchmesser angepaßt wird (WILLIS et al., 1972). Analog wurde in der vorliegenden Arbeit der Durchmesser der Konvektions-Walzen im Erdmantel derart angepaßt, daß Übereinstimmung zwischen errechnetem und gemessenem Wärmefluß erreicht wird. Nach dieser Anpassung werden von der Theorie auch die horizontalen Strömungsgeschwindigkeiten und die Niveau-Unterschiede auf den Meeresböden in der richtigen Größenordnung vorhergesagt.

Die Übereinstimmung mit den Beobachtungen wird noch etwas besser, wenn der Einfluß von Phasenumwandlungen auf die Konvektion berücksichtigt wird. Dieser Einfluß kann näherungsweise durch eine Modifikation der Rayleigh-Zahl berücksichtigt werden, sofern die Phasenumwandlung innerhalb einer Übergangszone stattfindet, deren Dicke klein gegenüber der Dicke der konvektierenden Schicht ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Dicke der Phasenübergangszone selbst unbedeutend; es ist dann insbesondere auch unwichtig, ob es sich um eine univariante oder eine bivariate Umwandlung handelt. Die modifizierte Rayleigh-Zahl (Gleichung 63) stimmt formal mit der normalen Rayleigh-Zahl überein, wenn ein effektiver Ausdehnungskoeffizient (Gleichung 64) und ein effektiver überadiabatischer Temperaturgradient (Gleichung 65) verwendet werden. Die thermodynamischen Parameter der Phasenumwandlung sind in diesen effektiven Größen in einer solchen Weise enthalten, daß ein und dieselbe Phasen-

umwandlung unter verschiedenen Umständen Konvektion entweder begünstigen oder hemmen kann. Eine Phasenumwandlung mit einer positiven Steigung der Phasengrenze im p-T-Diagramm hemmt Konvektion bei kleinem vertikalem Temperaturgradienten, aber fördert Konvektion bei großem vertikalem Temperaturgradienten in der Schicht. Gerade entgegengesetzt ist der Einfluß von Phasenumwandlungen mit negativer Steigung der Phasengrenze im p-T-Diagramm. Bei den Verhältnissen im Erdmantel wird Konvektion durch die Olivin-Spinell-Umwandlung begünstigt, dagegen durch die post-Spinell-Umwandlung behindert, sofern es sich hierbei um die Disproportionierung in Oxyde handelt, was durch neuere Ergebnisse der experimentellen Hochdruck-Mineralogie wahrscheinlich gemacht ist. Dies dürfte eine Ursache dafür sein, daß die Konvektion im Erdmantel nur bis in eine Tiefe von etwa 700 km hinabreicht.

Unter Berücksichtigung der Olivin-Spinell-Umwandlung kann mit 700 km tiefen und 7000 km breiten Konvektions-Walzen der Erdwärmestrom quantitativ erklärt werden, sofern die Temperatur in 700 km Tiefe etwa 1770 °C beträgt. Die Amplitude der horizontalen Strömungsgeschwindigkeit nahe der Erdoberfläche beträgt dann etwa 2,5 cm/Jahr, und auf den Meeresböden hätte man Niveau-Unterschiede von etwa $\pm$ 4 km zu erwarten. Diese Werte sind, insbesondere angesichts der Unsicherheit vieler Parameter, in befriedigender Übereinstimmung mit Beobachtungsdaten.

Dennoch ist nicht zu übersehen, daß die Theorie noch verbesserungsbedürftig ist. Eine Weiterentwicklung wird höhere Glieder in einer zweidimensionalen Fourier-Entwicklung der Geschwindigkeiten und daneben vor allem die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und der Wärmeleitfähigkeit zu berücksichtigen haben. Es darf vermutet werden, daß sich dann unter anderem auch die starke Abplattung der Konvektions-Walzen von selbst ergibt.

Die Olivin-Spinell-Umwandlung ist nicht nur als zusätzlicher Antrieb für die Konvektion, sondern auch im Hinblick auf einen eventuellen Nachweis der Konvektion mit seismischen Methoden

bemerkenswert. Die zugehörige Phasenübergangszone im Erdmantel sollte in Bereichen absteigender Konvektionsströme etwa 50 km höher als normal und in Bereichen aufsteigender Konvektionsströme entsprechend tiefer liegen. Wenn die vertikale Strömung auf relativ schmale Zonen konzentriert ist, sind sogar noch größere Abweichungen von der mittleren Tiefenlage zu erwarten. Die Frage, ob diese Undulationen der Phasenübergangszone Olivin-Spinell mit seismischen Methoden nachweisbar sind, läßt sich nur beantworten, wenn Rechenverfahren zur Verfügung stehen, mit Hilfe derer die Laufzeiten entsprechend kompliziert aufgebauter Erdmodelle genau berechnet werden können.

Es wurde daher ein Verfahren entwickelt, welches die Berechnung von seismischen Strahlen und Laufzeitkurven ermöglicht, wenn die Geschwindigkeit der seismischen Wellen nicht nur mit der Tiefe, sondern auch in horizontaler Richtung variiert. Das Verfahren wird an einigen Beispielen mit Undulationen der Übergangszone Olivin-Spinell demonstriert. Es zeigt sich, daß die laufzeit-seismischen Effekte dieser Undulationen gering sind (einige wenige Sekunden) und vermutlich mit dem weltweiten Netz seismischer Stationen allein nicht nachgewiesen werden können. Durch gezielte regionale Untersuchungen unter Einsatz mobiler seismischer Stationen großer Zeitauflösung sollte allerdings in Verbindung mit geeigneten Auswertungsverfahren, z.B. dem hier entwickelten Verfahren der Modellrechnung, ein Nachweis möglich sein. Dieses Verfahren dürfte sich über das hier behandelte spezielle Problem hinaus ganz allgemein als nützlich erweisen, wenn es um den Nachweis horizontaler Variationen der Geschwindigkeiten seismischer Wellen geht. Gerade die horizontalen Variationen im Erdmantel sind es ja, die im Zusammenhang mit den aktuellen Fragen der Geodynamik besonderes Interesse verdienen.

Literaturverzeichnis

- AKIMOTO, S. und Y. IDA: High-pressure synthesis of Mg_2SiO_4 -spinel. Earth Planet. Sci. Letters 1, 358-359, 1966
- ALLAN, D.W., W.B. THOMPSON und N.O. WEISS: Convection in the Earth's mantle. S. 507-512 in: Mantles of the Earth and terrestrial planets (Hrsg. S.K. Runcorn), Interscience Publ., London, 1967
- AMPFERER, O.: Über das Bewegungsbild von Faltengebirgen. Jb. geol. Reichsanstalt Wien 56, 539-622, 1906
- ANDERSON, D.L.: A seismic equation of state. Geophys. J. R. astr. Soc. 13, 9-30, 1967
- ANDERSON, D.L.: Phase changes in the upper mantle. Science 157, 1165-1173, 1967a
- ANDERSON, D.L. und Ch. SAMMIS: Partial melting in the upper mantle. Phys. Earth Planet. Int. 3, 41-50, 1970
- ANGENHEISTER, G.: Bemerkungen zur Expansion der Erde und zur Bewegung der Kontinente. In Vorbereitung, 1975
- BARAZANGI, M. und J. DORMAN: World seismicity maps compiled from ESSA, Coast and Geodetic Survey, epicenter data, 1961-1967. Bull. Seism. Soc. Am. 59, 369-380, 1969
- BASSET, W.A. und L.-C. MING: Disproportionation of Fe_2SiO_4 to $2\text{FeO} + \text{SiO}_2$ at pressures up to 250 kb and temperatures up to 3000 °C. Phys. Earth Planet. Int. 6, 154-160, 1972
- BATH, M.: Introduction to seismology. Birkhäuser, Basel, 1973
- BENARD, H.: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Rev. gén. d. Sciences 11, 1261-1271, 1900
- BENARD, H.: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. Annales de Chim. et de Phys., 7. Sér., 23, 62-144, 1901

- BENIOFF, H.: Orogenesis and deep crustal structure; additional evidence from seismology. Bull. Geol. Soc. Am. 65, 385-400, 1954
- BERNAL, J.D.: Hypothesis on 20 ° discontinuity. Observatory 59, 268, 1936
- BIRCH, F.: Elasticity and constitution of the Earth's interior. J. Geophys. Res. 57, 227-286, 1952
- BIRCH, F.: Composition of the Earth's mantle. Geophys. J. R. astr. Soc. 4, 295-311, 1961
- BOSTROM, R.C.: Westward displacement of the lithosphere. Nature 234, 536-538, 1971
- BULLEN, K.E.: The variation of density and the ellipticities of strata of equal density within the Earth. Month. Not. R. astr. Soc., Geophys. Suppl. 3, 395-401, 1936
- BULLEN, K.E.: A new method of deriving seismic velocity distributions from travel-time data. Geophys. J. R. astr. Soc. 3, 258-269, 1960
- BULLEN, K.E.: An introduction to the theory of seismology. Cambridge, 1963
- BUSSE, F.H.: On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. J. Math. Phys. 46, 140-150, 1967
- BUSSE, F.H.: The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. J. Fluid Mech. 30, 625-649, 1967a
- BUSSE, F.H. und G. SCHUBERT: Convection in a fluid with two phases. J. Fluid Mech. 46, 801-812, 1971
- BUSSE, F.H. und J. A. WHITEHEAD: Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid. J. Fluid Mech. 47, 305-320, 1971
- CHANDRASEKHAR, S.: The thermal instability in spherical shells. Phil. Mag., Ser. VII, 44, 233-241, 1953

- CHANDRASEKHAR, S.: Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, 1961
- CLARK, S.P.: Heat conductivity in the mantle. S.622-626 in: The Earth's crust and upper mantle (Hrsg. P.J. Hart), Am. Geophys. Union, Washington, 1969
- CLARK, S.P. und A.E. RINGWOOD: Density distribution and constitution of the mantle. Rev. Geophys. 2, 35-88, 1964
- COX, A.: Plate tectonics and geomagnetic reversals. Freeman & Co., San Francisco, 1973
- DALY, R.A.: Strength and structure of the Earth. Prentice-Hall, New York, 1940
- DAVIES, T.D. und N.T. EDGAR: Some geophysical aspects of deep-sea drilling. Geophys. Surveys 1, 391-407, 1974
- DeBREMAECKER, J.C.: Temperatures in a convecting upper mantle. Tectonophysics 21, 1-13, 1974
- DeGROOT, S.R.: Thermodynamik irreversibler Prozesse. Mannheim, 1960
- DIETZ, R.S.: Continent and ocean basin evolution by spreading of the sea floor. Nature 190, 854-857, 1961
- DIETZ, R.S.: Reply. J. Geophys. Res. 73, 6567, 1968
- FARAH DIEH, R. und R.S. TANKIN: Interferometric study of two-dimensional Bénard convection cells. J. Fluid Mech. 66, 739-752, 1974
- FISHER, O.: Physics of the Earth's crust. 2. Aufl., London, 1889
- FOSTER, R.J.: Physical Geology. Columbus/Ohio, 1971
- FUJISAWA, H.: Temperature and discontinuities in the transition layer within the Earth's mantle: Geophysical application of the Olivine-Spinel transition in the Mg_2SiO_4 - Fe_2SiO_4 system. J. Geophys. Res. 73, 3281-3294, 1968

- FUJISAWA, H., N. FUJII, H. MIZUTANI, H. KANAMORI und S. AKIMOTO:
Thermal diffusivity of Mg_2SiO_4 , Fe_2SiO_4 and NaCl at high
pressures and temperatures. J. Geophys. Res. 73, 4727-4733,
1968
- GAPOSCHKIN, E. M. und K. LAMBECK: Earth's gravity field to six-
teenth degree and station coordinates from satellite and
terrestrial data. J. Geophys. Res. 76, 4855-4883, 1971
- GARRELS, R. M., F. T. MacKENZIE und R. SIEVER: Sedimentary cycling
in relation to the history of the continents and oceans.
S. 83-121 in: The nature of the solid Earth (Hrsg. E. C.
Robertson), McGraw-Hill, Inc., 1972
- GEBRANDE, H.: Der Einfluß von Phasenumwandlungen auf Konvektions-
ströme im Erdmantel. Dipl.-Arbeit, Inst. Angew. Geophysik
Universität München, 65 S., München, 1966
- GEBRANDE, H.: Der Einfluß von Phasenumwandlungen auf Konvektions-
ströme im Erdmantel. Z. Geophys. 33, 297-318, 1967
- GEBRANDE, H.: Phasenumwandlungen und geodynamische Prozesse.
DFG-Kolloquium der Arbeitsgruppe Gesteinsphysik am 5.1.1973
in München, Vortragszusammenfassung.
- GOETZE, C.: High temperature rheology of westerly granit. J.
Geophys. Res. 76, 1223-1230, 1971
- GOLDREICH, P. und A. TOOMRE: Some remarks on polar wandering.
J. Geophys. Res. 74, 2555-2567, 1969
- GOLDSTEIN, R. J. und D. J. GRAHAM: Stability of a horizontal fluid
layer with zero shear boundaries. Phys. Fluids 12, 1133-1137,
1969
- GORDON, R. B.: Observation of crystal plasticity under high
pressure with application to the Earth's mantle. J. Geo-
phys. Res. 76, 1248-1254, 1971
- GREEN, H. W. II und S. V. RADCLIFFE: Deformation processes in the
upper mantle. S. 139-156 in: Flow and fracture of rocks
(Hrsg. H. C. Heard et al.), Washington, 1972

- GRIGGS, D.T.: The sinking lithosphere and the focal mechanism of deep earthquakes. S.361-384 in: The nature of the solid Earth (Hrsg.E.C.Robertson), McGraw-Hill, Inc., 1972
- HALES, A.L.: The travel times of P waves and their relevance to the upper mantle velocity distribution. Tectonophysics 13, 447-482, 1972
- HALLAM, A.: A revolution in the Earth sciences. Clarendon Press, Oxford, 1973
- HEIRTZLER, J.R., G.O.DICKSON, E.M.HERRON, W.C.PITMAN III und X.LePICHON: Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents. J.Geophys.Res. 73, 2119-2136, 1968
- HELMBERGER, D.V. und G.R.ENGEN: Upper mantle shear structure. J.Geophys.Res. 79, 4017-4028, 1974
- HELMHOLTZ, H.: Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. S.223-230 in: Wissenschaftliche Abhandlungen (Hrsg.H.Helmholtz), Band 1, Leipzig, 1882
- HESS, H.H.: History of ocean basins. S.599-630 in: Petrologic studies: a volume in honor of A.F.Buddington (hrsg.A.E. Engel et al.), Geol.Soc.Am., 1962
- HESS, H.H.: Reply. J.Geophys.Res. 73, 6569, 1968
- HOLMES, A.: Radioactivity and Earth movements. Trans.Geol.Soc. Glasgow 18, 559-606, 1931
- HOPKINS, W.: Researches in physical geology. Phil.Trans.Roy. Soc.London, 381-423, 1839
- ISACKS, B. und P.MOLNAR: Mantle earthquakes and the sinking of the lithosphere. Nature 223, 1121-1124, 1969
- ISACKS, B., J.OLIVER und L.R.SYKES: Seismology and the new global tectonics. J.Geophys.Res. 73, 5855-5899, 1968
- ITO, E., Y.MATSUI, K.SUITO und N.KAWAI: Synthesis of γ -Mg₂SiO₄. Phys.Earth Planet.Int. 8, 342-344, 1974

- ITO, K., S.ENDO und N.KAWAI: Olivine-Spinel transformation in a natural forsterite. Phys.Earth Planet.Int. 4, 425-428, 1971
- JACOBY, W.R.: Instability in the upper mantle and global plate movements. J.Geophys.Res. 75, 5671-5680, 1970
- JACOBY, W.R.: Isostasie und Dichteverteilung in Kruste und oberem Mantel. Z.Geophys. 39, 79-96, 1973
- JEFFREYS, H.: The stability of a layer of fluid heated below. Phil.Mag., VII Ser., 2, 833-844, 1926
- JEFFREYS, H.: Some cases of instability in fluid motion. Proc.Roy.Soc.London, Ser.A, 118, 195-208, 1928
- JEFFREYS, H.: The Earth, 2.Aufl., Cambridge, 1929
- JEFFREYS, H.: The instability of a compressible fluid heated below. Proc.Camb.Phil.Soc. 26, 170-172, 1930
- JEFFREYS, H. und M.E.M.BLAND: The instability of a fluid sphere heated within. Month.Not.R.astr.Soc., Geophys. Suppl. 6, 148-158, 1951
- JEFFREYS, H.: Problems of thermal instability in a sphere. Month.Not.R.astr.Soc., Geophys.Suppl. 6, 272-277, 1952
- JEFFREYS, H.: The Earth. 4.Aufl., London und New York, 1959
- JOHNSON, L.R.: Array measurements of P velocities in the lower mantle. Bull.Seism.Soc.Am. 59, 973-1008, 1969
- JORDAN, P.: Die Expansion der Erde, Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese. Braunschweig, 1966
- JORDAN, T.H.: Some comments on tidal drag as a mechanism for driving plate motions. J.Geophys.Res. 79, 2141-2142, 1974
- JORDAN, T.H. und D.L.ANDERSON: Earth structure from free oscillations and travel times. Geophys.J.R.astr.Soc. 36, 411-459, 1974

- KANAMORI, H., N. FUJII und H. MIZUTANI: Thermal diffusivity measurements of rock-forming minerals from 300 to 1100 °K. J. Geophys. Res. 73, 595-605, 1968
- KAYSER, M. V. und J. C. BERG: Surface relief accompanying natural convection in liquid pools heated from below. J. Fluid Mech. 57, 739-752, 1973
- KIRBY, S. H. und C. B. RALEIGH: Mechanisms of high-temperature, solid-state flow in minerals and ceramics and their bearing on the creep behavior of the mantle. Tectonophysics 19, 165-194, 1973
- KNOPOFF, L.: The convection current hypothesis. Rev. Geophys. 2, 89-122, 1964
- KOHLSTEDT, D. L. und C. GOETZE: Low-stress high-temperature creep in olivine single crystals. J. Geophys. Res. 79, 2045-2051, 1974
- KOPAL, Z.: Convection in planetary interiors. Icarus 1, 391-400, 1963
- KREY, T.: Betrachtungen zum Stand der "Angewandten Seismik". Erdöl-Erdgas-Zeitschrift 87, 80-99, 1971
- KUMAZAWA, M., H. SAWAMOTO, E. OHTANI und K. MASAKI: Postpinel phase of forsterite and evolution of the Earth's mantle. Nature 247, 356-358, 1974
- LEE, W. H. K.: On the global variations of terrestrial heat-flow. Phys. Earth Planet. Int. 2, 332-341, 1970
- LEPICHON, X.: Sea-floor spreading and continental drift. J. Geophys. Res. 73, 3661-3697, 1968
- LEPICHON, X., J. FRANCHETEAU und J. BONNIN: Plate tectonics. Elsevier, Amsterdam, 1973
- LLIBOULTY, L.: Sea floor spreading, continental drift and lithosphere sinking with an asthenosphere at melting point. J. Geophys. Res. 74, 6525-6540, 1969
- LLIBOULTY, L.: Rheological properties of lithosphere. Tectonophysics 24, 13-29, 1974

- LOMNITZ, C.: Global tectonics and earthquake risk.
Elsevier, Amsterdam, 1974
- LUBIMOVA, E.A.: Theory of thermal state of the Earth's mantle.
S. 232-323 in: The Earth's mantle (Hrsg. T.F.Gaskell).
Acad.Press, London und New York, 1967
- MacDONALD, G.J.F.: Geophysical deductions from observations
of heat flow. S. 191-210 in: Terrestrial heat flow (Hrsg.
W.H.K.Lee). Am.Geophys.U., Washington, 1965
- MacDONALD, G.J.F.: The deep structure of continents.
Rev.Geophys. 1, 587-665, 1963
- MALKUS, W.V.R.: Discrete transitions in turbulent convection.
Proc.Roy.Soc.A 225, 185-195, 1954
- MALKUS, W.V.R.: The heat transport and spectrum of thermal
turbulence. Proc.Roy.Soc.A 225, 196-212, 1954
- MALKUS, W.V.R. und G.VERONIS: Finite amplitude cellular
convection. J.Fluid Mech. 4, 225-260, 1958
- MAO, H., T.TAKAHASHI, W.A.BASSET und J.S.WEAVER: Effect of
pressure and temperature on the molar volumes of wüstite
and of three (Fe,Mg)₂SiO₄ spinel solid solutions.
J.Geophys.Res. 74, 1061-1069, 1969
- MARVIN, U.B.: Continental drift, the evolution of a concept.
Smithsonian Inst.Press, Washington, 1973
- McCONNELL, R.K.: Viscosity of the mantle from relaxation
spectra of isostatic adjustment.
J.Geophys.Res. 22, 7089-7105, 1968
- McKENZIE, D.P.: The viscosity of the mantle.
Geophys.J.R.astr.Soc. 14, 297-305, 1967
- McKENZIE, D.P., J.M.ROBERTS und N.O.WEISS: Numerical models
of convection in the Earth's mantle. Tectonophysics 19,
89-103, 1973
- McKENZIE, D.P., J.M.ROBERTS und N.O.WEISS: Convection in the
Earth's mantle: towards a numerical simulation.
J.Fluid Mech. 62, 465-538, 1974

- McMECHAN, G.A. und R.A. WIGGINS: Depth limits in body wave inversion. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 28, 459-473, 1972
- MEYERHOFF, A.A.: Arthur Holmes: Originator of spreading ocean floor hypothesis. *J. Geophys. Res.* 73, 6563-6565, 1968
- MING, L.-C. und W.A. BASSET: The postspinel phases in the Mg_2SiO_4 - Fe_2SiO_4 system. *Science* 187, 66-68, 1975
- MOCRE, D.R. und N.O. WEISS: Two-dimensional Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* 58, 289-312, 1973
- MOORE, G.W.: Westward tidal lag as the driving force of plate tectonics. *Geology* 1, 99-101, 1973
- MOORE, P.B. und J.V. SMITH: Crystal structure of β - Mg_2SiO_4 : Crystal-chemical and geophysical implications. *Phys. Earth Planet. Int.* 3, 166-177, 1970
- MORGENSTERN, D. und I. SZABO: Vorlesungen über theoretische Mechanik. Berlin, 1961
- MURRELL, S.A.F. und S. CHAKRAVARTY: Some new rheological experiments on igneous rocks at temperatures up to 1120 °C. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 34, 211-250, 1972
- O'CONNELL, R.J.: Pleistocene glaciation and the viscosity of the lower mantle. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 23, 299-327, 1971
- OLIVER, J., B. ISACKS, M. BARAZANGI und W. MIRONOVAS: Dynamics of the down-going lithosphere. *Tectonophysics* 19, 133-147, 1973
- OROWAN, E.: Convection in a non-Newtonian mantle, continental drift, and mountain building. S.284-313 in: A symposium on continental drift (Hrsg. P.M.S. Blackett, Sir E. Bullard und S.K. Runcorn). Roy. Soc. London, 1965
- OXBURGH, E.R.: Plate tectonics. S.263-285 in: Understanding the Earth (Hrsg. J.G. Gass et al.). Sussex, 1971
- PÄSLER, M.: Neuer Beweis und Gültigkeitserweiterung eines hydrodynamischen Minimalsatzes. *Z. Phys.* 156, 287-292, 1959

- PEKERIS, C.L.: Thermal convection in the interior of the Earth. Month. Not. R. astr. Soc., Geophys. Suppl. 3, 343-367, 1935
- PLATZMAN, G.W.: The spectral dynamics of laminar convection. J. Fluid Mech. 23, 481-510, 1965
- RAYLEIGH, J.W.S.: On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Philos. Mag., VI Ser. 32, 529-546, 1916
- RICE, A.: Some Bénard convection experiments: their relationship to viscous dissipation and possible periodicity in sea-floor spreading. J. Geophys. Res. 77, 2514-2525, 1972
- RICHTER, F.M.: Dynamical models for sea floor spreading. Rev. Geophys. Space Phys. 11, 223-287, 1973a
- RICHTER, F.M.: Finite amplitude convection through a phase boundary. Geophys. J. R. astr. Soc. 35, 265-276, 1973b
- RINGWOOD, A.E.: A model for the upper mantle. J. Geophys. Res. 67, 857-867, 1962a
- RINGWOOD, A.E.: A model for the upper mantle, 2. J. Geophys. Res. 67, 4473-4477, 1962b
- RINGWOOD, A.E.: Phase transformations and the constitution of the mantle. Phys. Earth Planet. Int. 3, 109-155, 1970
- RINGWOOD, A.E.: Phase transformations and mantle dynamics. Earth Planet. Sci. Letters 14, 233-241, 1972
- RINGWOOD, A.E.: Mineralogy of the deep mantle: current status and future developments. S.67-92 in: The nature of the solid Earth (Hrsg. E.C. Robertson). McGraw-Hill Inc., 1972
- RINGWOOD, A.E. und A. MAJOR: Synthesis of Mg_2SiO_4 - Fe_2SiO_4 spinel solid solutions. Earth Planet. Sci. Letters 1, 241-245, 1966
- ROBERTS, P.H.: Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory. J. Fluid Mech. 30, 33-49, 1967
- ROBINSON, R. und R.L. KOVACH: Shear wave velocities in the Earth's mantle. Phys. Earth Planet. Int. 5, 30-44, 1972

- ROTHER, J.P.: The seismicity of the Earth 1953-1965.
UNESCO, Paris, 1969
- RUNCORN, S.K.: Convection in the mantle. S.692-698 in:
The Earth's crust and upper mantle (Hrsg. P.J.Hart).
Am.Geophys.Union, Washington, 1969
- SAMMIS, C.G. und J.L.DEIN: On the possibility of transformational superplasticity in the Earth's mantle.
J.Geophys.Res. 79, 2961-2966, 1974
- SCHLÜTER, A., D.LORTZ und F.BUSSE: On the stability of steady finite amplitude convection.
J.Fluid Mech. 23, 129-144, 1965
- SCHMIDT-THOME: Tektonik, Band II von "Lehrbuch der allgemeinen Geologie" (Hrsg. R.Brinkmann). Enke, Stuttgart, 1972
- SCHUBERT, G. und D.L.TURCOTTE: Phase changes and mantle convection. J.Geophys.Res. 76, 1424-1432, 1971
- SCHWIDERSKI, E.W. und H.J.A.SCHWAB: Convection experiments with electrolytically heated fluid layers.
J.Fluid Mech. 48, 703-710, 1971
- SCHWINNER, R.: Vulkanismus und Gebirgsbildung. Ein Versuch.
Z.Vulkanologie 5, 175-230, 1920
- SENFTEL, E. und C.EXNER: Rezente Hebung der Hohen Tauern und geologische Interpretation. Verh.Geol.B.-A. Wien, Jg. 1973, 209-234, 1973
- STAUDACHER, W.: Die Temperatur-Leitfähigkeit von natürlichem Olivin bei hohen Drucken und Temperaturen, bestimmt nach zwei Methoden mit instationärer Wärmeleitung.
Diss.Nat.Fak.Universität München, 1971
- STOCKER, R.L. und M.F.ASHBY: On the rheology of the upper mantle. Rev.Geophys.Space Phys. 11, 391-426, 1973
- SUESS, E.: Das Antlitz der Erde, Vol. 1. Wien und Leipzig, 1908

- SYKES, L.R.: Mechanism of earthquakes and nature of faulting on the mid-ocean ridges.
J.Geophys.Res. 72, 2131-2153, 1967
- THOMSON, Sir W. (Lord KELVIN) und P.G.TAIT: Treatise on natural philosophy, Appendix D. New.Ed., Cambridge, 1895
- TORRANCE, K.E. und D.L.TURCOTTE: Thermal convection with large viscosity variations. J.Fluid Mech. 47, 113-125, 1971
- TOZER, D.C.: Thermal history of the Earth, I. The formation of the core. Geophys.J. 9, 95-112, 1965
- TRITTON, D.J. und M.N.ZARRAGA: Convection in horizontal layers with internal heat generation. Experiments. J.Fluid Mech. 30, 21-32, 1967
- TURCOTTE, D.L., A.T.HSUI, K.E.TORRANCE und G.SCHUBERT: Influence of viscous dissipation on Bénard convection. J.Fluid Mech. 64, 369-374, 1974
- TURCOTTE, D.L. und E.R.OXBURGH: Convection in a mantle with variable physical properties. J.Geophys.Res. 74, 1458-1474, 1969
- TURCOTTE, D.L. und G.SCHUBERT: Structure of the olivine-spinel phase boundary in the descending lithosphere. J.Geophys.Res. 76, 7980-7987, 1971
- Van BEMMELEN, R.W. und H.P.BERLAGE: Versuch einer mathematischen Behandlung geotektonischer Bewegung unter besonderer Berücksichtigung der Undationstheorie. Gerlands Beitr.Geophys. 43, 19-55, 1935
- VENING MEINESZ, F.A.: Instability in the Earth's mantle because of the phase-transition layer. Proc.Koninkl. Ned.Acad. Wetensch., Ser.B, 60, 409-415, 1957
- VENING MEINESZ, F.A.: Convection currents in the Earth. S.397-441 in: The Earth and its gravity field (Hrsg. W.A.Heiskanen und F.A.Vening Meinesz). McGraw-Hill, New York und London, 1958

- VENING MEINESZ, F.A.: Thermal convection in the Earth's mantle. S.145-176 in: Continental drift (Hrsg. S.K. Runcorn). New York und London, 1962
- VERHOOGEN, J.: Phase changes and convection in the Earth's mantle. S.276-283 in: A symposium on continental drift (Hrsg. P.M.S. Blackett, Sir E. Bullard und S.K. Runcorn). Roy. Soc. London, 1965
- VERONIS, G.: Large-amplitude Bénard convection. J. Fluid Mech. 26, 49-68, 1966
- VINE, F.J.: Spreading of the sea floor: new evidence. Science 154, 1405-1415, 1966
- VINE, F.J. und D.H. MATTHEWS: Magnetic anomalies over ocean ridges. Nature 199, 947-949, 1963
- WALZER, U.: Convection in a spherical shell under consideration of equations of state for the Earth's mantle. Gerl. Beitr. Geophys. 82, 267-281, 1973
- WALCOTT, R.I.: Structure of the Earth from glacio-isostatic rebound. Ann. Rev. Earth Planet. Sc. 1, 15-37, 1973
- WANG, C.Y.: A simple Earth model. J. Geophys. Res. 77, 4318-4329, 1972
- WEDEPOHL, K.H.: Die Zusammensetzung der Erdkruste. Fortschr. Miner. 46, 145-174, 1969
- WEERTMANN, J.: The creep strength of the Earth's mantle. Rev. Geophys. Space Phys. 8, 145-168, 1970
- WEGENER, A.: Die Entstehung der Kontinente. Petermanns Geogr. Mitteilungen 58, 185-195, 253-256 und 305-309, 1912
- WEGENER, A.: Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. 4. Auflage. Vieweg & Sohn, 1928
- WILL, M.: Refraktionsseismik im Nordteil der Ostalpen zwischen Salzach und Inn, 1970-1974; Messungen und deren Interpretation. Als Diss. eingereicht, Fak. Geowissenschaften L.-M.-Universität München, 1975

WILLIS, G.E., J.W.DEARDORFF und R.C.SOMERVILLE: Roll-diameter dependence in Rayleigh convection and its effect upon the heat flux.

J.Fluid Mech. 54, 351-367, 1972

WILSON, J.T.: A new class of faults and their bearing on continental drift. Nature 207, 243-247, 1965

YOUNG, R.E.: Finite-amplitude thermal convection in a spherical shell. J.Fluid Mech. 63, 695-721, 1974

Nachtrag:

PRESS, F.: Seismic velocities. S.195-218 in: Handbook of physical constants (Hrsg. S.P.Clark). Geol.Soc.Am. Inc., New York, 1966

WHITE, J.E.: Seismic waves. Radiation, transmission, and attenuation. McGraw-Hill Comp., New York, 1965

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Allgemeine und Angewandte Geophysik (früher: Institut für Angewandte Geophysik) der Ludwig-Maximilians-Universität München angefertigt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof.Dr.G.Angenheister, der mich in die Probleme der Geodynamik eingeführt und zu eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiet ermutigt hat, möchte ich hier besonders danken. Durch vielfältige Anregungen hat Herr Prof.Dr.G.Angenheister die vorliegende Arbeit beeinflusst. Nicht zuletzt bin ich für die sorgsame Durchsicht des Manuskripts, die zu einigen Verbesserungsvorschlägen geführt hat, dankbar.

Herrn Prof.Dr.O.Förtsch sowie den Kollegen der Arbeitsgruppe "Seismik", vorab Herrn Dr.H.Miller, Herrn Dr.E.Schmedes und Herrn Dipl.Geophys.M.Will, verdanke ich eine Reihe von Anregungen, die insbesondere der Entwicklung des Verfahrens der Modell-Rechnung förderlich waren.

Lebenslauf

Am 29. Juni 1940 wurde ich als zweites von vier Kindern des selbständigen Zahntechniker-Meisters Hans Gebrande und seiner Frau Ida, geb. Eckert, in Säckingen geboren.

Von 1946 bis 1950 besuchte ich die Volksschule und anschließend das Real-Gymnasium in Säckingen bis zum Erwerb des Reifezeugnisses im Frühjahr 1959.

Nach drei Semestern Physik-Studium an der Universität Tübingen wechselte ich zum Wintersemester 1960/61 mit dem Studienziel Geophysik nach München über. Die Diplom-Vorprüfung im Fach Geophysik legte ich im Juli 1963, die Hauptprüfung im Dezember 1966 ab.

Seit 1965 war ich als Privat-Bediensteter von Prof.Dr. G.Angenheister, von Juli 1968 bis Juni 1973 als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wiss. Assistenten und seither als wiss. Hilfskraft am Institut für Angewandte Geophysik tätig. Dabei hatte ich insbesondere Gelegenheit, in einer Reihe von Forschungsvorhaben auf dem Gebiet der Seismik mitzuarbeiten.

Ich bin verheiratet und habe zwei Kinder.

A n h a n g

Die allgemeine Grundgleichung des Wärmetransports

In der Literatur finden sich unterschiedliche, zum Teil widersprüchliche Versionen der Wärmeleitungsgleichung für bewegte Flüssigkeiten. Uneinigkeit besteht insbesondere für kompressible Flüssigkeiten. Aus diesem Grunde scheint es angebracht, die Wärmeleitungsgleichung in der auf Seite 37, Gleichung (9), eingeführten Form zu beweisen.

Die Herleitung ergibt sich aus einer Kombination der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Wir folgen hierbei weitgehend der Beweisführung von LANDAU und LIF-SCHITZ (1966), erweitern diese aber insofern, als wir die Existenz des Schwerfeldes und radiogene Wärmequellen berücksichtigen.

Massen- und Impuls-Erhaltung werden in differentieller Form durch die Gleichungen (7) und (8), also die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen, beschrieben. Den Energie-Erhaltungssatz für eine bewegte kompressible Flüssigkeit im Schwerfeld müssen wir erst noch in geeigneter Weise formulieren.

Es ist zweckmäßig, zunächst die spezifische Energie, d.h. die Energie pro Masseneinheit einzuführen. Diese setzt sich aus der kinetischen, der potentiellen und der inneren Energie zusammen:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + \gamma + u \quad (77)$$

$\vec{v}$ =Strömungsgeschwindigkeit, γ =Schwerpotential, u =spezifische innere Energie; von der Existenz elektrischer und magnetischer Felder wollen wir absehen. Durch Multiplikation mit der Dichte ρ erhalten wir die Energiedichte $\rho\varepsilon$. Wenn Radioaktivität im Spiel ist, empfiehlt es sich, die

innere Energie gemäß

$$(78) \quad u = u_k(t) + u(p, T)$$

in zwei Anteile zu zerlegen, wobei der erste, ausschließlich von der Zeit, aber nicht von Druck und Temperatur abhängige Anteil die Kern-Energie beinhalten und der zweite die übliche thermodynamische innere spezifische Energie (kurz: innere Energie) darstellen möge. Wir beschränken uns auf Flüssigkeiten, schließen also eine Abhängigkeit der inneren Energie von Komponenten des deviatorischen Spannungstensors aus.

Wir betrachten nun die Energiebilanz für ein räumlich festgehaltenes, von der Flüssigkeit durchströmtes Volumenelement $\int V$ mit der Oberfläche $F(\partial V)$.

Der Energieinhalt dieses Volumenelements ist

$$\iiint_V \rho \varepsilon dV$$

Veränderungen des Energieinhalts sind, von eventuellen zeitlichen Änderungen des Schwerepotentials abgesehen, nur möglich durch Einflüsse, die über die Oberfläche $F(\partial V)$ auf das Volumenelement einwirken. Folgende Beiträge sind zu berücksichtigen:

1. Abnahme des Energieinhalts infolge des Ausströmens von Energie, die an die strömende Materie gebunden ist. Dieser Beitrag ist:

$$\oint_{F(\partial V)} \rho \varepsilon \vec{v} d\vec{f}$$

$d\vec{f}$ ist der nach außen gerichtete Normalen-Vektor der Oberfläche.

2. Abnahme des Energieinhalts infolge eines Energieflusses j , der, wie der Wärmetransport durch Leitung, nicht an die makroskopische Strömung der Materie gebunden ist. Dieser Beitrag ist:

$$\oint_{F(\partial V)} \vec{j} d\vec{f}$$

3. Zunahme des Energieinhalts infolge der Leistung der Oberflächenkräfte. Mit dem Spannungstensor $\tau_{ik} = \sigma_{ik} - \delta_{ik} p$

wird dieser Beitrag:

$$\oint_{F(\delta V)} \vec{v} \tau_{ik} d\vec{f} = \oint_{F(\delta V)} \vec{v} (\sigma_{ik} - \delta_{ik} p) d\vec{f}$$

Zusammengefaßt ergibt sich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen folgende Energiebilanz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\delta V} \rho \varepsilon dV = \oint_{F(\delta V)} \left\{ -\varepsilon \rho \vec{v} - \vec{j} + \vec{v} (\sigma_{ik} - \delta_{ik} p) \right\} d\vec{f}$$

Division durch δV führt nach dem Grenzübergang $\delta V \rightarrow 0$ auf die differentielle Energiebilanz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) = - \operatorname{div} \left\{ \varepsilon \rho \vec{v} + \vec{j} - \vec{v} (\sigma_{ik} - \delta_{ik} p) \right\} \quad (79)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \operatorname{div} (\rho \varepsilon \vec{v}) = - \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} (\vec{v} \sigma_{ik}) - \operatorname{div} (\vec{v} p)$$

Durch partielle Differentiation sämtlicher Glieder und Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf der linken Seite erhält man:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \varepsilon \right) &= - \operatorname{div} \vec{j} + \vec{v} \operatorname{div} (\sigma_{ik}) + \\ &+ (\sigma_{ik} \operatorname{grad}) \vec{v} - \rho \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{grad} p \end{aligned} \quad (80)$$

Indem man auf der linken Seite die spezifische Energie durch die Beziehungen (77) und (78) ausdrückt, erhält man:

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \varepsilon \right)}_{\frac{d\varepsilon}{dt}} = \underbrace{\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{v} \operatorname{grad} \psi}_{-\rho \vec{v} \vec{g}} + \underbrace{\rho \frac{d}{dt} (u_k)}_{\rho \dot{u}_k} + \rho \frac{du}{dt}$$

Der Einfachheit halber ist hier vorausgesetzt, daß die Radioaktivität ortsunabhängig und das Schwerepotential zeitunabhängig sei.

Nach Einsetzen in Gl. (80) und Umordnung der Glieder ergibt sich:

$$(81) \quad \rho \frac{du}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{div} \vec{j} - \rho \dot{u}_k + (\sigma_{ik} \operatorname{grad}) \vec{v} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{g} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{grad} p + \vec{v} \operatorname{div} (\sigma_{ik})$$

Die Glieder in der zweiten Zeile kompensieren sich aufgrund der Bewegungsgleichungen (8) bzw. der Impulserhaltung. Die Bewegungsgleichungen (8) können durch partielle Differentiation der linken Seite und Anwendung der Kontinuitätsgleichung (7) in die Form

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} (\sigma_{ik})$$

überführt werden, woraus nach Multiplikation mit $\vec{v}$ die Gleichung

$$\rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{g} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{grad} p + \vec{v} \operatorname{div} (\sigma_{ik})$$

hervorgeht. Dies bedeutet aber gerade die Kompensation der Glieder in der zweiten Zeile von Gl. (81).

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{v}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{v} \frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} \\ &= \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \vec{v} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} \\ &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Aus Gl. (81) wird daher

$$(82) \quad \rho \left\{ \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} = -\operatorname{div} \vec{j} - \rho \dot{u}_k + (\sigma_{ik} \operatorname{grad}) \vec{v}$$

wo nun nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik die linke Seite gleich $\rho T \frac{ds}{dt}$ ist. Der letzte Term rechts ist die Wärme-
produktion durch innere Reibung (Gl. 11). In der Energiestrom-
dichte $\vec{j}$ ist im allgemeinen außer der Wärmestromdichte auch der
Energietransport durch radioaktive Strahlung enthalten. Im vor-
liegenden Zusammenhang kann angenommen werden, daß die radio-

aktive Strahlung praktisch lokal absorbiert und in Wärme umgewandelt wird. In diesem Fall ist der Energietransport durch radioaktive Strahlung zu vernachlässigen und die Abnahme der Kernenergie wird gleich der lokalen Wärmeproduktion, d.h. $-\rho \dot{U}_K = h$. Nach Division der Gl. (82) durch die absolute Temperatur und mit dem Fourier'schen Ansatz

$$j = -\lambda \text{grad} T$$

ergibt sich schließlich

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \frac{h}{T} + \frac{\phi}{T} \quad , \quad (83)$$

was nach Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf der linken Seite auf die zu beweisende Gleichung (9) führt.

Literatur:

LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: Hydrodynamik. Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VI. Akademie-Verlag, Berlin, 1966

